Correction des épreuves communes de mathématiques 4ème du 18 janvier 2010

Partie numérique (20 points)

Exercice 1: (3 points)

$A=-5+3$
$A=-2$

$B=-5-3$
$B=-8$

$C=-5\times3$
$C=-15$

$D=-5\times(-3)$
$D=15$

$E=3-5+7-2+6$
$E=-2+5+6$
$E=3+6$
$E=9$

$F=(-2)\times(-3)+(+2)\times(+3)$
$F=6+6$
$F=12$

Exercice 2: (5 points)

$G=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\times\frac{25}{7}$

$G=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\times\frac{5\times5}{7}$

$G=\frac{3}{2}-\frac{5}{7}$

$G=\frac{21}{14}-\frac{10}{14}$

$G=\frac{11}{14}$

$H=\left(\frac{2}{8}-\frac{3}{15}\right)\div\frac{3}{10}$

$H=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\div\frac{3}{10}$

$H=\left(\frac{5}{20}-\frac{4}{20}\right)\div\frac{3}{10}$

$H=\frac{1}{2\times10}\times\frac{10}{3}$

$H=\frac{1}{6}$

$I=\frac{\frac{5}{4}+\frac{2}{5}}{2-\frac{7}{5}}$

$I=\frac{\frac{25}{20}+\frac{8}{20}}{\frac{10}{5}-\frac{7}{5}}$

$I=\frac{33}{20}\div\frac{3}{5}$

$I=\frac{3\times11}{5\times4}\times\frac{5}{3}$

$I=\frac{11}{4}$

$J=\frac{-15}{7}\times\frac{-2}{5}\times\frac{14}{6}$

$J=\frac{-1\times5\times3\times(-1)\times2\times7\times2}{7\times5\times2\times3}$

$J=2$

$K=\frac{-6}{5}\times\frac{72}{56}\times\frac{42}{9}$

$K=\frac{-1\times3\times2\times9\times8\times7\times6}{5\times8\times7\times9}$

$K=\frac{-36}{5}$

Exercice 3: (5 points)

a)

$L=4\times5^2$
$L=4\times25$
$L=100$

$M=8+5\times3^2$
$M=8+5\times9$
$M=8+45$
$M=53$

b)

$N=5{,}2\times10^3\times4\times10^5$
$N=20{,}8\times10^{3+5}$
$N=2{,}08\times10\times10^8$
$N=2{,}08\times10^9$

$P=\frac{15\times10^3\times4\times10^{-2}}{2{,}4\times(10^4)^2}$

$P=\frac{60\times10^{3-2}}{2{,}4\times10^8}$

$P=\frac{60}{2{,}4}\times\frac{10}{10^8}$

$P=25\times10^{1-8}$
$P=2{,}5\times10\times10^{-7}$
$P=2{,}5\times10^{1-7}$
$P=2{,}5\times10^{-6}$

Exercice 4: (2 points)

On doit calculer les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$, ce qui fait $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$. Ainsi, Léa a dépensé les $\frac{3}{5}$ de son forfait pour appeler Rachel.

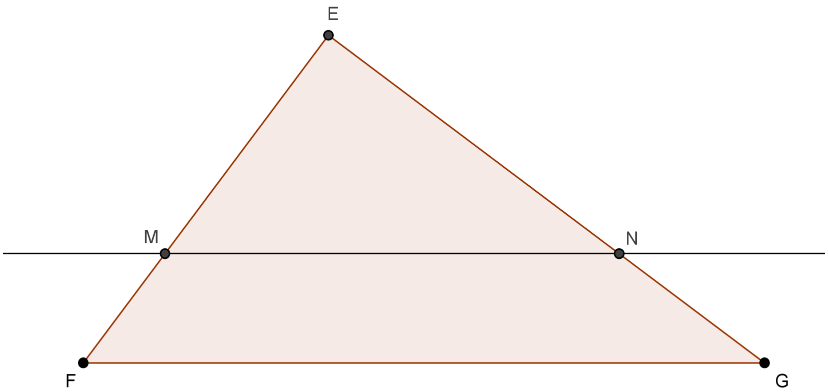
Exercice 5: (5 points)

1) On calcule la fraction correspondant à ce qui a déjà été pris en charge par l'État, la région et le département: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{83}{140}$. Il reste par conséquent $1-\frac{83}{140}=\frac{140-83}{140}=\frac{57}{140}$ du total à payer,
   soit $\frac{57}{140}\times3{,}5\times10^6=1\,425\,000$ €. Comme cette somme est à partager équitablement entre les trois communes, chacune devra donc verser $1\,425\,000\div3$ = $475\,000$ €.
2) a) Le produit de l'inverse de 7 par 3 est $\frac{1}{7}\times3=\frac{3}{7}$.
   b) La somme du produit de -7 par 2 et du quotient de 45 par -5 est
   $-7\times2+\frac{45}{-5}=-14+(-9)=-23$.
   c) Le carré de la somme de 9 et 2 est $(9+2)^2=11^2=121$.
   d) L'opposé de l'inverse de -13 est $-\frac{1}{-13}=\frac{1}{13}$.

Partie géométrique (18 points)

Exercice 1: (8 points)

1) Voici le triangle EFG réalisé à l'aide du logiciel Géogebra.



2) Comme $EM=\frac{2}{3}\times EF$, on a $EM=\frac{2}{3}\times 5{,}4=3{,}6$ cm.
3) Dans le triangle EFG, on a M ∈ [EF], N ∈ [EG] et (MN) // (FG), d'après le théorème de Thalès: $\frac{EM}{EF}=\frac{EN}{EG}=\frac{MN}{FG}$. De l'égalité $\frac{EM}{EF}=\frac{EN}{EG}$, on obtient $EN=\frac{EM\times EG}{EF}=\frac{3{,}6\times 7{,}2}{5{,}4}=4{,}8$ cm.
4) Dans EFG, on calcule d'une part le carré du plus grand côté : $FG^2=9^2=81$, d'autre part la somme des carrés des deux autres côtés : $EF^2+EG^2=5{,}4^2+7{,}2^2=29{,}16+51{,}84=81$.
   On constate qu'alors $FG^2=EF^2+EG^2$: le triangle EFG est donc rectangle en E d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
5) Rappel: l'aire d'un triangle (quelconque) est donnée par la formule $\frac{Base\times hauteur}{2}$.
   Comme EMN est rectangle (car EFG l'est), nous pouvons prendre un des côtés de l'angle droit comme base, l'autre fait alors office de hauteur correspondante. Il vient alors:
   $\mathcal{A}_{EFG}=\frac{EM\times EN}{2}=\frac{3{,}6\times 4{,}8}{2}=8{,}64$ cm^2.

Exercice 2: (5 points)

1) On applique le théorème de Pythagore dans HIK rectangle en H: $IK^2=IH^2+HK^2$.
   On a alors $IH^2=IK^2-HK^2=6{,}5^2-3{,}3^2=31{,}36$. Comme IH>0, il vient IH = $\sqrt{31{,}36}$ = 5,6 cm.
   De même, on applique le théorème de Pythagore dans IJK rectangle en H : $IJ^2=IH^2+HJ^2$.
   On obtient $JH^2=IJ^2-IH^2=10{,}6^2-5{,}6^2=81$, soit $JH=9$ cm.
2) On a $JK=JH+HK=9+3{,}3=12{,}3$ cm. Dans IJK, on calcule d'une part le carré du plus grand côté : $JK^2=12{,}3^3=151{,}29$ et d'autre part la somme des carrés des deux autres côtés : $JI^2+IK^2=10{,}6^2+6{,}5^2=154{,}61$. Comme $JK^2\neq JI^2+IK^2$, on en déduit que le triangle IJK n'est pas rectangle d'après le théorème de Pythagore.

Exercice 3: (5 points)

1) Dans BCD, la droite (JK) passe par le milieu du côté [BC] (le point J) et est parallèle au côté [BD], elle coupe donc le troisième côté [DC] en son milieu : c'est le point K.
2) On a (JK) // (BD) et (BD) ⊥ (DC) ainsi (JK) ⊥ (DC) (si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre). En outre, K est le milieu de [DC]. La droite (JK) coupe donc [DC] perpendiculairement en son milieu, c'est donc la médiatrice de [DC].
   Rappel: tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de celui-ci.

Comme J appartient à la médiatrice de [DC], on a donc JD = JC et ainsi le triangle JDC est isocèle en J.

3) Dans le triangle ADC, on sait que :

I est le milieu de [AC];

K est le milieu de [DC];

Ainsi, la droite (IK) est parallèle à (AD) car dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

4) Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté. On applique cette dernière propriété dans le triangle ADC avec I et K comme milieux respectifs des côtés [DC] et [AC], ce qui permet de conclure que $IK = \frac{AD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm.