Corrigé des Epreuves Communes de mathématiques

$4^{ème}$

Coefficient: 2 — 120 min

Calculatrice autorisée — mai 2010

La présentation et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans le devoir (2 points).

Partie 1 : Numérique (22 points)

▷ **Exercice 1** **(5 points) :**

Calculer en écrivant les étapes et en donnat le résultat sous forme d'un entier ou d'une fraction réduite :

a) $1+\frac{1}{7}\times\frac{7}{3}=1+\frac{1}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

b) $\frac{12}{15}\times\frac{25}{8}=\frac{\cancel{4}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}\times 5}{\cancel{4}\times 2}=\frac{5}{2}$

c) $\frac{27}{7}\div(\frac{1}{2}-\frac{7}{5})=\frac{27}{7}\div(\frac{5}{10}-\frac{14}{10})=\frac{27}{7}\div\frac{-9}{10}=\frac{27}{7}\times\frac{-10}{9}=\frac{\cancel{9}\times 3}{7}\times\frac{-10}{\cancel{9}}=\frac{-30}{7}$

d) $2^3-4^3+3^2=8-64+9=-47$

e) $\frac{8\times10^4}{16\times10^2}=\frac{\cancel{8}\times\cancel{10^2}\times10^2}{\cancel{8}\times2\times\cancel{10^2}}=\frac{100}{2}=50$

▷ **Exercice 2** **(3 points) :**

Supprimer les parenthèses et réduire :

$A=\ (2x-4)-(3x-2)=2x-4-3x+2=-x-2$

$B=\ 3(x-5)+(2x+1)(3x-2)=3x-15+6x^2-4x+3x-2=6x^2+2x-17$

▷ **Exercice 3** **(5 points) :**

Ecrire sous forme décimale :

$C=\ 7,8\times10^{-5}=0,000\,078$

$D=\ 3,8\times10^4=38\,000$

Ecrire les nombres restants sous la forme a^n où n est un entier relatif :

$E=\ 5^4\times5^{-3}\times5^2=5^{4-3+2}=5^3$

$F=\ \frac{3^{-6}}{3^4}=3^{-6-4}=3^{-10}$

$G=\ (3^4)^{-2}=3^{4\times(-2)}=3^{-8}$

▷ **Exercice 4** **(3 points) :**

Céline et Anne choisissent un même nombre. Céline ajoute 2 à ce nombre et multiplie les résultat par 5. Anne ajoute 25 au double du nombre choisi. Elles constatent qu'elles obtiennent le même résultat.

On appelle x le nombre choisi au départ.

a) Ecrire le problème sous forme d'une équation.

Le calcul fait par Céline donne : $5(x+2)$.

Le calcul fait par Anne donne : $25+2x$.

Leurs deux calculs étant identiques, on obtient l'équation suivante $5(x+2)=25+2x$.

b) Résoudre celle-ci.

$5(x+2)=25+2x$

$5x+10=25+2x$

$5x-2x=25-10$

$3x=15$

$x=\frac{15}{3}=5$

Céline et Anne avaient choisi 5 comme nombre initial.

▷ **Exercice 5** **(6 points) :**

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$H=\ 17\,500\,000=1,75\times10^7$

$I=\ 0,004\,1=4,1\times10^{-3}$

$J=\ 85,2\times10^{-4}=8,52\times10\times10^{-4}=8,52\times10^{-3}$

$K=\ 0,000\,037\times10^9=3,7\times10^{-5}\times10^9=3,7\times10^{-5+9}=3,7\times10^4$

$L=\ 24\times10^{-4}\times0,5\times10^8=24\times0,5\times10^{-4}\times10^8=12\times10^{-4+8}=12\times10^4=1,2\times10\times10^4=1,2\times10^5$

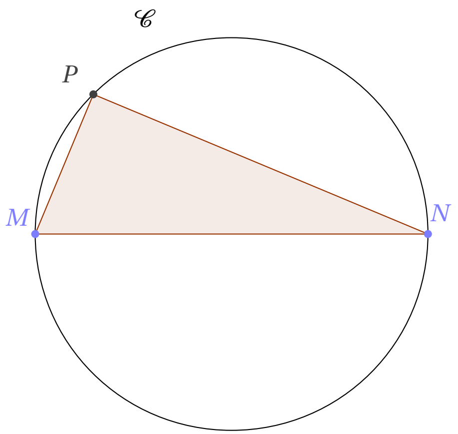
$M=\ \frac{16\times10^{-5}\times3\times10^4}{24\times10^{-3}}=\frac{\cancel{8}\times2\times\cancel{3}\times10^{-5+4}}{\cancel{8}\times\cancel{3}\times10^{-3}}=\frac{2\times10^{-1}}{10^{-3}}=2\times10^{-1-(-3)}=2\times10^{-1+3}=2\times10^2$

Partie 2 : Géométrique (16 points)

▷ **Exercice 6** ____________ **(5 points) :**

$\mathscr{C}$ est un cercle de $2,6\ cm$ de rayon. Le segment $[MN]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$. P est un point de $\mathscr{C}$ tel que $MP = 2\ cm$;

a) Faire une figure.



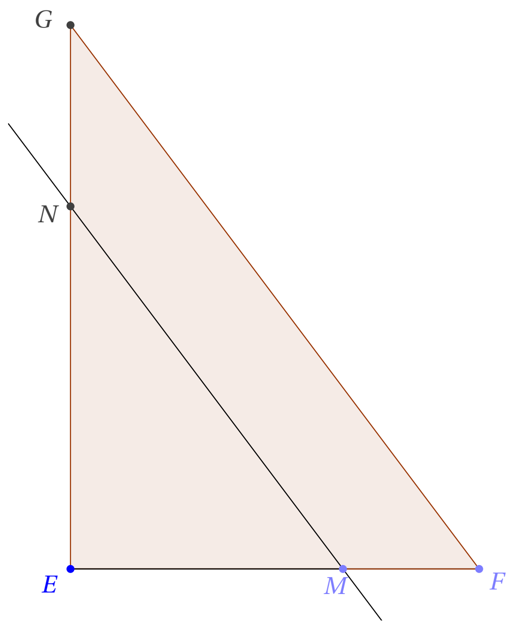
b) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en P.
MNP est inscrit dans un (demi) cercle ayant pour diamètre son côté $[MN]$, il est donc rectangle en P.

c) Calculer la longueur PN.
Comme MNP est rectangle en P, on peut appliquer le théorème de Pythagore à celui-ci :
$MN^2 = MP^2 + PN^2$, d'où $PN^2 = MN^2 - MP^2 = 5,2^2 - 2^2 = 23,04$.
On en déduit que $PN = \sqrt{23,04} = 4,8\ cm$ car PN étant une distance, $PN > 0$.

d) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MNP}$ arrondie au degré près.
Dans le triangle MNP rectangle en P, on a :
$cos(\widehat{MNP}) = \dfrac{PN}{MN} = \dfrac{4,8}{5,2}$ et par conséquent :
$\widehat{MNP} = 23°$ au degré près.

▷ **Exercice 7** ____________ **(5 points) :**

Construire un triangle EFG tel que $EF = 5,4\ cm$; $EG = 7,2\ cm$; $FG = 9\ cm$.



Soit M le point du segment $[EF]$ tel que $EM = \dfrac{2}{3}EF$.

a) Calculer EM, puis placer le point M.
On a $EM = \dfrac{2}{3} \times EF = \dfrac{2}{3} \times 5,4 = 3,6\ cm$.

b) Par M, on mène la parallèle à $[FG]$; elle coupe $[EG]$ en N. Calculer EN.
Dans le triangle EFG, comme M appartient à $[EF]$, N appartient à $[EG]$ et que $(MN) \parallel (FG)$, on peut appliquer le théorème de Thalès :
$\dfrac{EM}{EF} = \dfrac{EN}{EG} = \dfrac{MN}{FG}$.
Comme on sait que $\dfrac{EM}{EF} = \dfrac{2}{3}$, de la première égalité, on en déduit que $\dfrac{EN}{EG} = \dfrac{2}{3}$ et donc que $EN = \dfrac{2}{3} \times EG = \dfrac{2}{3} \times 7,2 = 4,8\ cm$

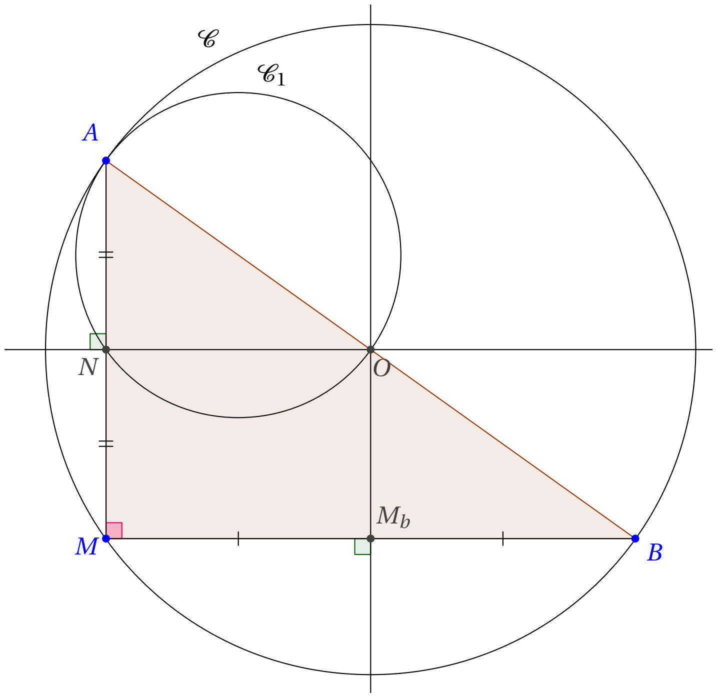
c) Démontrer que le triangle EFG est rectangle en E.
Dans le triangle EFG, le carré du plus grand côté est $FG^2 = 9^2 = 81$;
et la somme des carrés des deux autres côtés est $EF^2 + EG^2 = 5,4^2 + 7,2^2 = 29,16 + 51,84 = 81$.
Ainsi on constate que $EF^2 + EG^2 = FG^2$, et par conséquent EFG est rectangle en E d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

d) En déduire l'aire du triangle EMN. Comme EFG est rectangle en E, il en est de même pour le triangle EMN (car N appartient à $[EG]$ et M à $[EF]$).
$\mathscr{A}_{EMN} = \dfrac{Base \times hauteur}{2} = \dfrac{EM \times EN}{2} = \dfrac{3,6 \times 4,8}{2} = 8,64\ cm^2$

▷ **Exercice 8** **(6 points) :**

On considère un triangle AMB rectangle en M.

a) Fais une figure à compléter au fur et à mesure de l'exercice.



b) On appelle ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABM (son centre est noté O).
Préciser la position particulière du point O.
Comme le triangle ABM est rectangle en M, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse, donc O est aussi le milieu de $[AB]$.

c) On appelle ($\mathscr{C}_1$) le cercle de diamètre $[AO]$. La droite (AM) coupe le cercle ($\mathscr{C}_1$) en N.

1. Démontre que les droites (ON) et (MB) sont parallèles.

   Le triangle AON est inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}_1$) qui a pour diamètre son côté $[AO]$, il est donc rectangle en N. Ainsi, $(AN) \perp (NO)$. Comme A,N et M sont alignés, on en déduit que $(AM) \perp (NO)$. Or, on sait que $(AM) \perp (MB)$, donc $(MB) \,//\, (NO)$. [2 droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles].

2. Démontre que N est le milieu du segment $[AM]$.

   Rappel : Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

   On applique cette propriété des milieux dans le triangle AMB dans lequel O est le milieu de $[AB]$ et $(ON) \,//\, (MB)$; on peut alors en conclure que N est le milieu du segment $[AM]$.