Chapitre 8

# Cours: Fonctions linéaires et affines

## Table des matières


1 Fonctions linéaires . . . . . 2
1.1 Définition . . . . . 2
1.2 Représentation graphique . . . . . 2
1.3 Augmentation ou diminution de $a$ % . . . . . 3
2 Fonctions affines . . . . . 4
2.1 Définition . . . . . 4
2.2 Représentation graphique . . . . . 4
2.3 Proportionnalité des accroissements . . . . . 5
3 Méthodes . . . . . 6
3.1 Représenter une fonction linéaire . . . . . 6
3.2 Déterminer une fonction linéaire . . . . . 6
3.3 Utiliser une fonction linéaire pour une diminution de $a$ % . . . . . 6
3.4 Déterminer une fonction affine . . . . . 7
3.5 Représenter une fonction affine . . . . . 7
3.6 Représenter une fonction connaissant son coefficient directeur, un nombre et son image . 8
3.7 Interpréter une représentation graphique . . . . . 8

# 1. Fonctions linéaires

## 1.1. Définition

**Définition**

Soit $a$ un nombre quelconque. Une **fonction linéaire f de coefficient** $a$ est la fonction qui associe, à tout nombre $x$, le nombre $ax$. On note $f : x \mapsto ax$

**Exemples :**

- La fonction $g$ définie par $g(x) = -7x$ est une fonction linéaire de coefficient -7.
- La fonction $h$ définie par $h(x) = -7x^2$ n'est pas une fonction linéaire.

**Propriétés**

- L'image $f(x) = ax$ de tout nombre $x$ par une fonction linéaire de coefficient $a$ est **proportionnelle** à l'antécédent $x$, le coefficient de proportionnalité étant $a$.
- Toute situation de proportionnalité peut être représentée par une fonction linéaire.

**Exemple :** Le périmètre d'un carré de côté $x$ est l'image de $x$ par la fonction linéaire $x \mapsto 4x$.

## 1.2. Représentation graphique

**Propriétés**

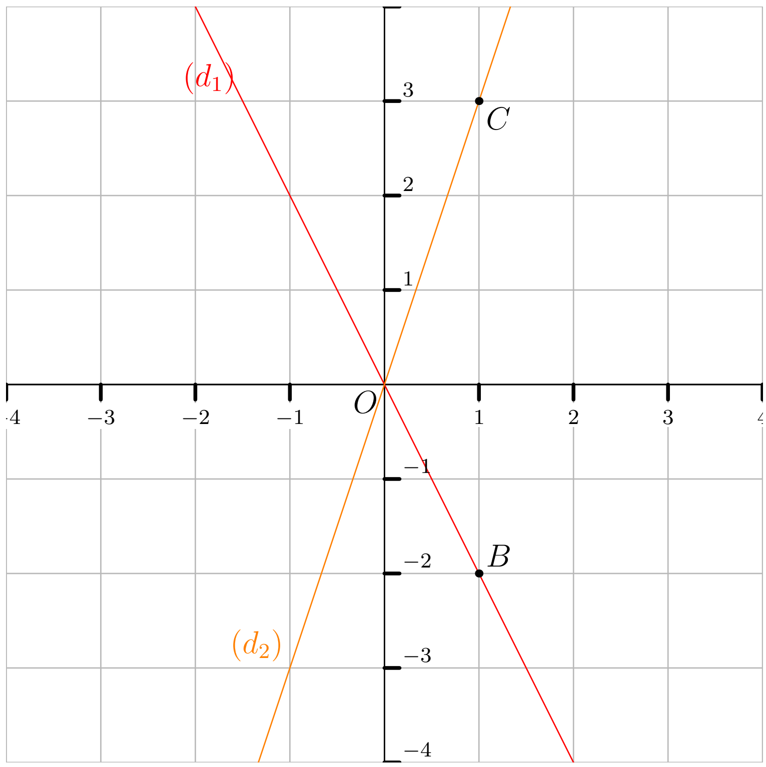
- Dans un répère, un **fonction linéaire** de coefficient $a$ est représentée par **une droite** $(d)$ **passant par l'origine** du repère, autre que l'axe des ordonnées. Le nombre $a$ est appelé **coefficient directeur** de la droite $(d)$.
- **Réciproquement**, toute droite passant par l'origine du repère, autre que l'axe des ordonnées, représente une fonction linéaire.

**Exemple :**

Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ représentent respectivement les fonctions linéaires $g : x \mapsto -2x$ et $h : x \mapsto 3x$.
Le coefficient directeur de la droite $(d_1)$ est $-2$ et celui de $(d_2)$ est 3.
$g(1) = -2$, donc le point $B(1; -2)$ appartient à $(d_1)$.
$h(1) = 3$, donc le point $C(1; 3)$ appartient à $(d_2)$.

**Remarque :**

Les points de la droite $(d)$ sont tous les points $M$ du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'égalité $y = ax$.




## 1.3. Augmentation ou diminution de $a$ %

**Propriétés**

Soit $a$ un nombre positif.

- Une **augmentation de $a$ %** est représentée par la fonction linéaire $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{a}{100}\right)x$.
- Une **diminution de $a$ %** ($a \leq 100$) est représentée par la fonction linéaire $f : x \mapsto \left(1 - \dfrac{a}{100}\right)x$.

**Exemples :**

- Augmenter un prix $P$ de 5 %, c'est multiplier par $\left(1 + \dfrac{5}{100}\right) = 1,05$. Soit $f : P \mapsto 1,05P$.
- Diminuer une masse $M$ de 8 %, c'est multiplier par $\left(1 - \dfrac{8}{100}\right) = 0,92$. Soit $g : M \mapsto 0,92M$.

## 2. Fonctions affines

### 2.1. Définition

**Définition**

Soit $a$ et $b$ deux nombres quelconques. Une **fonction affine** $f$ est une fonction qui associe, à tout nombre $x$, le nombre $ax+b$. On note $f : x \mapsto ax+b$

**Exemples :**

- La fonction $g$ définie par $g(x) = 3x+2x$ est une fonction laffine avec $a = 3$ et $b = 2$.
- La fonction $h$ définie par $h(x) = -2x+5$ est une fonction laffine avec $a = -2$ et $b = 5$.

**Cas particuliers**

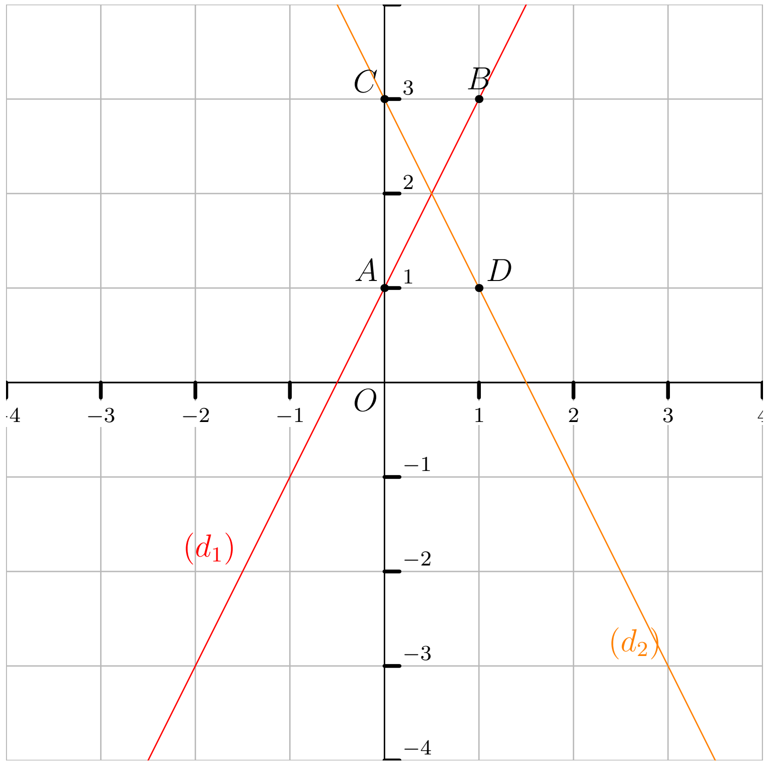
- Si $a = 0$, alors $f : x \mapsto b$. La fonction $f$ est une fonction constante.
- Si $b = 0$, alors $f : x \mapsto ax$. La fonction $f$ est une fonction linéaire de coefficient $a$.

### 2.2. Représentation graphique

**Propriétés**

- Dans un répère, un **fonction affine** $f : x \mapsto ax+b$ est représentée par **une droite** $(d)$ **non parallèle** à l'axe des ordonnées. Le nombre $a$ est appelé **coefficient directeur** de la droite $(d)$. Le nombre $b$ est appelé **ordonnée à l'origine** de $(d)$.
- **Réciproquement**, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine.

**Exemple :**
Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ représentent respectivement les fonctions affines $g : x \mapsto 2x+1$ et $h : x \mapsto -2x+3$.
Le coefficient directeur de la droite $(d_1)$ est 2 et celui de $(d_2)$ est $-2$.
L'ordonnée à l'origine de la droite $(d_1)$ est 1 et celui de $(d_2)$ est 3.
$g(0) = 1$ et $g(1) = 3$, donc les points $A(0;1)$ et $B(1;3)$ appartiennent à $(d_1)$.
$h(0) = 3$ et $h(1) = 1$, donc les points $C(0;3)$ et $D(1;1)$ appartiennent à $(d_2)$.




**Remarques :**

- La droite $(d)$ est parallèle à la droite représentative de la fonction linéaire $x :\mapsto ax$.
- La droite $(d)$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; b)$.
- Les **points de la droite** $(d)$ sont tous les points $M$ du plan dont les coordonnées $(x; y)$ **vérifient l'équation** $y = ax + b$.

## 2.3. Proportionnalité des accroissements

**Propriété**

Soient $f$ une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$, $x_1$ et $x_2$ deux nombres distincts.
L'accroissement de $f(x)$ est proportionnel à l'accroissement de $x$ , $a$ étant le coefficient de proportionnalité.
Soit $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ ou $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

**Exemple :**

Soit $f$ la fonction affine définié par $f(x)$=4x-3. On a $\dfrac{f(100) - f(99)}{100 - 99} = \dfrac{397 - 393}{1} = 4 = a$

## 3. Méthodes

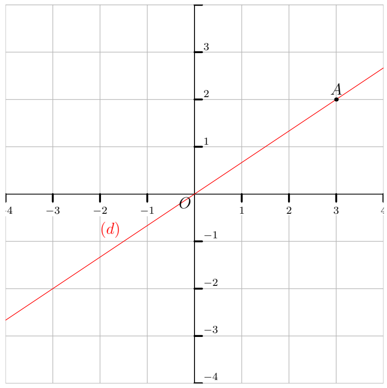
### 3.1. Représenter une fonction linéaire

**Énoncé**

Dans le plan muni d'un repère d'origine $O$, représenter la fonction linéaire $f : x \mapsto \frac{2}{3}x$.

**Solution :**

$f(3) = \frac{2}{3} \times 3 = 2$, donc le point $A(3;2)$ appartient à la droite représentative de $f$. Comme on sait qu'une fonction linéaire passe par l'origine $O$ du repère, on peut tracer $(OA)$.




### 3.2. Déterminer une fonction linéaire

**Énoncé**

Déterminer la fonction $g$ dont la représentation graphique est la droite $(d)$ passant par l'origine $O$ du repère et par le point $A(-3;4)$.

**Solution :**
La droite $(OA)$ n'est pas confondue avec l'axe des ordonnées. Elle est donc une fonction linéaire $g$ de coefficient directeur $a$.
On peut écrire : $g(x) = ax$.
$A(-3;4) \in (d)$, donc $g(-3) = 4$.
Or, $g(-3) = a \times (-3)$, donc $-3a = 4$, soit $a = -\frac{4}{3}$.
La fonction $g$ est définie par $g(x) = -\frac{4}{3}x$.

### 3.3. Utiliser une fonction linéaire pour une diminution de $a$ %

**Énoncé**

Un site de vente en ligne propose des réductions de 60 % sur les prix en magasin.

1. On désigne par $P_1$ le prix en magasin d'un article et par $P_2$ le prix de cet article sur le site. Exprimer $P_2$ en fonction de $P_1$.
2. Calculer le prix réduit d'un article vendu 180 € en magasin.
3. Calculer le prix en magasin d'un article vendu 95 € sur le site.

**Solution :**

1. $P_2 = \left(1 - \dfrac{60}{100}\right) \times P_1 = (1 - 0,6) \times P_1) = 0,4P_1$.
2. D'arpès le résultat précédent, $P_2 = 0,4P_1$, d'où $P_2 = 0,4 \times 180 = 72$.
   Le prix réduit de l'article est de 72 €.
3. $P_2 = 0,4P_1$, d'où $0,95 = 0,4P_1$, soit $P_1 = \dfrac{0,95}{0,4} = 237,5$.
   Le prix en magasin est de 237,5 €.

## 3.4. Déterminer une fonction affine

**Énoncé**

Soit $f$ une fonction affine telle que : $f(-2) = 2$ et $f(4) = 5$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$.

**Solution :**

- $f$ est une fonction affine, donc $f(x) = ax + b$.
  $a = \dfrac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \dfrac{5-2}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
  Par conséquent, on a : $f(x) = \dfrac{1}{2}x + b$.
- $f(-2) = 2$, d'où : $\dfrac{1}{2}(-2) + b = 2$, soit : $-1 + b = 2$, donc $b = 2 + 1 = 3$.
  On a donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$.

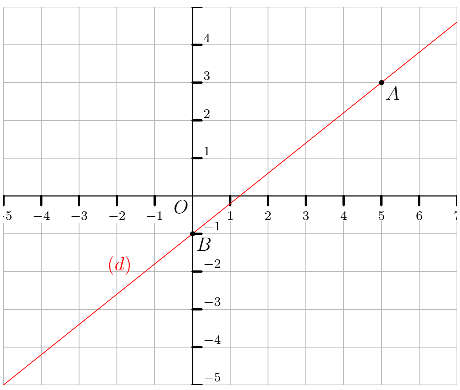
## 3.5. Représenter une fonction affine

**Énoncé**

Dans le plan muni d'un repère d'origine $O$, représenter la fonction affine $f : x \mapsto \dfrac{4}{5}x - 1$.

**Solution :**

Soit $(d)$ la droite représentative de la fonction $f$.
$f(5) = 3$, donc : $A(5;3) \in (d)$.
$f(0) = -1$, donc : $B(0;-1) \in (d)$.
La représentation graphique de $f$ est la droite $(AB)$.



## 3.6. Représenter une fonction connaissant son coefficient directeur, un nombre et son image

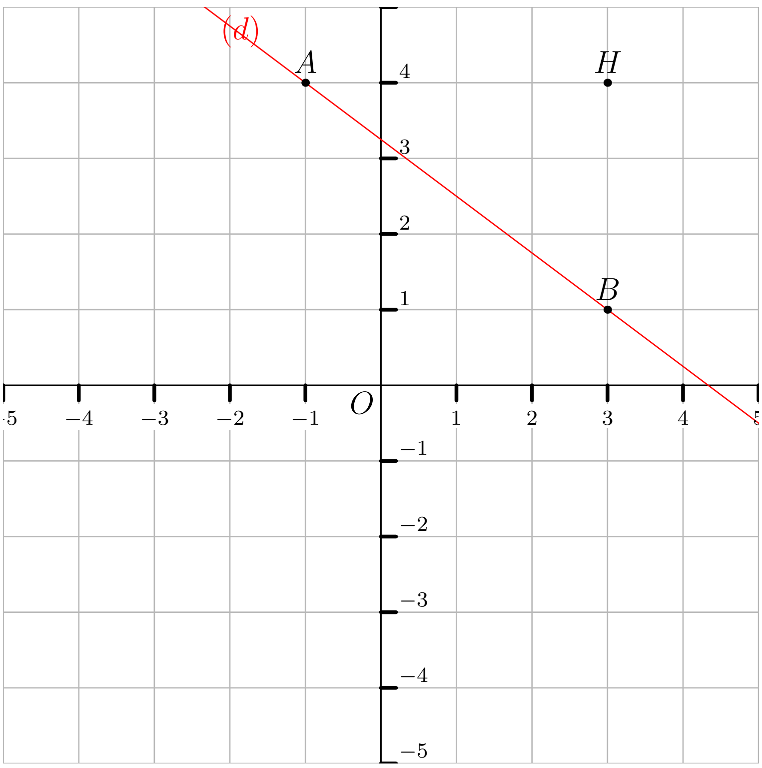
**Énoncé**

Tracer la droite représentative de la fonction affine $f$ en sachant que son coefficient directeur est $\dfrac{-3}{4}$ et que $f(-1) = 4$.

**Solution :**

- $f(-1) = 4$, donc on commence par placer le point $A(-1;4)$.
- $a = \dfrac{-3}{4}$, donc on place un point $B$ tel que l'accroissement entre $y_A$ et $y_B$ est $-3$ et celui entre $x_A$ et $x_B$ est 4.
  Pour cela :
  - on place le point $H$ à 4 unités à droite du point $A$, parallèlement à l'axe des abscisses.
  - on place le point $B$ à 3 unités du point $H$, en descendant parallèlement à l'axe des ordonnées.
  - on trace la droite $(AB)$.

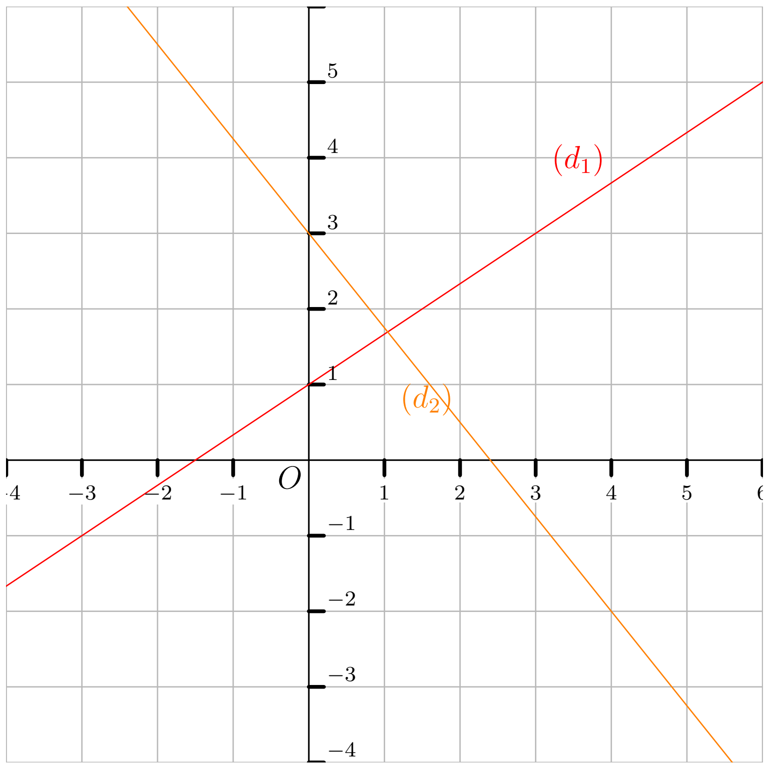
La représentation graphique de $f$ est la droite $(AB)$.




## 3.7. Interpréter une représentation graphique

**Énoncé**

Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites $(d_1)$ et $(d_2)$ représentées ci-dessous.




**Solution :**

- **Pour la droite** $(d_1)$ **:**
  Les points $A(0;1)$ et $B(3;3)$ appartiuennent à $(d_1)$.
  Donc : $f(0) = 1$ et $f(3) = 3$. On a ainsi $a = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{2}{3}$.

  Le coefficient directeur de $(d_1)$ est $\dfrac{2}{3}$, et son ordonnée à l'origine est 1.
- **Pour la droite** $(d_2)$ **:**
  Les points $A(0;3)$ et $B(4;-2)$ appartiuennent à $(d_2)$.
  Donc : $f(0) = 3$ et $f(4) = -2$. On a ainsi $a = \dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \dfrac{-5}{4}$.

  Le coefficient directeur de $(d_2)$ est $\dfrac{-5}{4}$, et son ordonnée à l'origine est 3.