

COURS: ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Table des matières

1	Rappels : Équations du premier degré à une inconnue	2
1.1	<u>Définitions</u>	2
1.2	<u>Autres définitions</u>	2
2	Équations produit nul	2
2.1	<u>Définitions</u>	2
2.2	<u>Propriété</u>	3
3	Inéquation du premier degré à une inconnue	4
3.1	Inéquations de premier degré à une inconnue	4
3.2	Inégalités et opérations	4
3.3	Résoudre une inéquation du premier degré	4

1. Rappels : Équations du premier degré à une inconnue

1.1. Définitions

Vocabulaire

- Une **équation à une inconnue** est une égalité contenant un nombre dont on ne connaît pas la valeur.
- Ce nombre, désigné par une lettre, est appelé l'**inconnue** de l'équation.
- Une équation est du **premier degré** lorsque le plus grand exposant de l'inconnue est égal à 1.

Exemples :

$3 - 4x = 11 - 6x$ est une équation d'inconnue x .

Cette équation est du premier degré car le plus grand exposant de x est égal à 1.

$3 - 4x$ est le premier **membre** de l'équation et $11 - 6x$ est le deuxième membre de l'équation.

1.2. Autres définitions

Vocabulaire

- Une **solution** d'une l'équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité proposée est vraie..
- **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemple :

Pour résoudre l'équation $3 - 4x = 11 - 6x$, on applique les propriétés de transformation d'une égalité vues en 4ème.

$$3 - 4x = 11 - 6x$$

$$3 + 2x = 11$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

La solution de l'équation $3 - 4x = 11 - 6x$ est le nombre 4.

2. Équations produit nul

2.1. Définitions

Vocabulaire

Une **équation produit nul** est une équation dont le premier membre est un produit et le deuxième membre est égal à zéro.

Exemple :

$(7x - 5)(4x - 3) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x .

Le premier membre de cette équation est le produit $(7x - 5)(4x - 3)$, et le deuxième membre de l'équation est 0.

En développant cette équation, on a : $(7x - 5)(4x - 3) = 28x^2 - 21x - 20x + 15 = 28x^2 - 41x + 15$.

Cette équation est du **second degré**, car le plus grand exposant de x est 2.

Exercices :

Résoudre les équations suivantes :

a) $x + 5 = 3$.

b) $6x + 4(2 - 5x) = 7x$.

c) $3(x + 1) = x + 6$.

d) $-3x = 5 + (1 + 6x)$.

e) $\frac{3}{5}(x - \frac{5}{7}) = \frac{3}{10}x$.

f) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}x$.

2.2. Propriété

Propriété

Un **produit est nul** lorsque l'un de ses facteurs est nul, et seulement dans ce cas. Autrement dit, x et y étant deux nombres relatifs :

- si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.
- si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $xy = 0$.

Exemple :

L'équation $(7x - 5)(4x - 3) = 0$ est une équation produit nul. Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul :

$7x - 5 = 0$ ou $4x - 3 = 0$

$7x = 5$ ou $4x = 3$

$x = \frac{5}{7}$ ou $x = \frac{3}{4}$

L'équation $(7x - 5)(4x - 3) = 0$ possède deux solutions qui sont $x = \frac{5}{7}$ et $x = \frac{3}{4}$

Exercices :

Résoudre les équations suivantes :

a) $(4x + 12)(-7x + 21) = 0$.

b) $(\frac{2}{7}x - 1)(2 + \frac{5}{6}x) = 0$.

c) $5x^2 + 3x = 0$.

d) $(3x - 6)^2 = 0$.

e) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

f) $x^2 - 16 = 0$.

g) $81 - 25x^2 = 0$.

h) $(x + 2)^2 - 9 = 0$.

i) $(6x + 1)^2 - (7 + 4x)^2 = 0$.

j) $(5 - 3x)^2 - (-1 + 8x)^2 = 0$.

3. Inéquation du premier degré à une inconnue

3.1. Inéquations de premier degré à une inconnue

Définitions

- Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité contenant un nombre, désigné par une lettre, appelé inconnue de l'inéquation.
- Une inéquation est du **premier degré** lorsque le plus grand exposant de l'inconnue est égal à 1.
- Une **solution** d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

Exemple :

$5x + 3 \leq 9 - x$ est une inéquation d'inconnue x . Cette inéquation est du premier degré car le plus grand exposant de x est égal à 1.

$5x + 3$ est le premier membre de l'inéquation et $9 - x$ est le deuxième membre de l'inéquation.

- Si $x = 2$ alors $5x + 3 = 5 \times 2 + 3 = 13$ et $9 - x = 9 - 2 = 7$. $13 > 7$, donc 2 **n'est pas une solution** de l'inéquation $5x + 3 \leq 9 - x$.
- Si $x = -4$ alors $5x + 3 = 5 \times (-4) + 3 = -17$ et $9 - x = 9 - (-4) = 13$. $-17 \leq 13$, donc -4 **est une solution** de l'inéquation $5x + 3 \leq 9 - x$.

3.2. Inégalités et opérations

Rappel

- Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$. *Le sens de l'inégalité ne change pas.*
- Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. *Le sens de l'inégalité ne change pas.*
- Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. *Le sens de l'inégalité change.*

3.3. Résoudre une inéquation du premier degré

Définitions

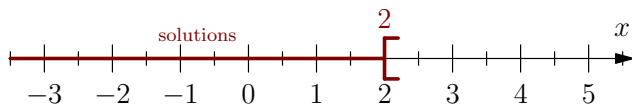
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemples :

On considère l'inéquation : $5x + 1 < 11$.

$$\begin{aligned}5x + 1 &< 11 \\5x + 1 - 1 &< 11 - 1 \\5x &< 10 \\ \frac{5x}{5} &< \frac{10}{5} \\x &< 2\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation $5x + 1 < 11$ sont les nombres inférieurs à 2, représentés en rouge sur la droite graduée ci-dessous :



Le crochet est tourné vers la partie non colorée car le nombre 2 n'est pas une solution de l'inéquation proposée.

Exercices :

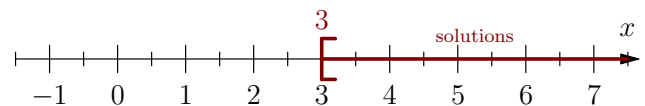
Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $x + 5 < 7$.
- b) $13 - x \leq 12$.
- c) $x - 6 > 11$.
- d) $9 + 4x \geq 7$.

On considère l'inéquation : $-3x + 5 \leq -4$.

$$\begin{aligned}-3x + 5 - 5 &\leq -4 - 5 \\-3x &\leq -9 \\ \frac{-3x}{-3} &\leq \frac{-9}{-3} \\x &\geq -3\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation $-3x + 5 \leq -4$ sont les nombres supérieurs ou égaux à 3, représentés en rouge sur la droite graduée ci-dessous :



Le crochet est tourné vers la partie colorée car le nombre 3 est une solution de l'inéquation proposée.

- e) $x - \frac{4}{3} < \frac{5}{3}$.
- f) $-3x + 2 < -7$.
- g) $2 - 4x > 1 - 6x$.
- h) $7(-2x + 5) - 3(4 - 2x)$.