Devoir de mathématiques : chap.3 Arithmétique, sujet A — $3^{ème}$ 3

Coefficient: 1 — 55 min

Calculatrice autorisée — jeudi 7 novembre 2013

▷ Exercice 1 (3 points) :

1 ► *A partir de l'égalité* $37 \times 13 = 481$, *quelles phrases peut-on écrire, en utilisant les termes "multiple", "diviseur", "divisible par" ? (une phrase par terme).*

- 481 est un **multiple** de 37 (ou de 13).
- 37 (ou 13) est un **diviseur** de 481.
- 481 est **divisible par** 37 (ou par 13).

2 ► *26 est-il un diviseur de 852 ? Expliquer la réponse.*
On a $852 = 26 \times 32 + 20$, comme le reste de cette division Euclidienne n'est pas nul (il vaut 20 ici), 26 n'est donc pas un diviseur de 252.

▷ Exercice 2 (4 points) :

1 ► *On sait que le nombre A est à la fois un multiple de 8 et un multiple de 11. Donner une valeur possible de A, sachant que A est inférieur à 200.*
8 et 11 étant premiers entre eux, le nombre A s'écrit $A = 8 \times 11 \times k = 88k$, ou k est un nombre entier. Il suffit alors de prendre différentes valeurs pour k, sachant que $A < 200$, on obtient $A = 88$ ou $A = 176$.

2 ► *Trouver les deux chiffres manquants du nombre B (B = 5 2□□) pour qu'il soit divisible à la fois par 5 et par 9. Donner toutes les possibilités.*
5 et 9 étant premiers entre eux, le nombre B s'écrit $B = 5 \times 9 \times q = 45q$, où q est un nombre entier. On trouve avec l'aide de la calculatrice $B = 45 \times 116 = 5\,220$ ou encore $B = 45 \times 117 = 5\,265$.

3 ► *Les nombres 423 et 183 sont-ils premiers entre eux ? Justifier, sans calculer leur PGCD.*
Ces deux nombres sont divisibles par trois de manière évidente, puisque la somme de leurs chiffres est divisible par trois. Leur PGCD est donc au moins égal à trois, et par conséquent, ils ne peuvent être premiers entre eux.

▷ Exercice 3 (5 points) :

1 ► *Trouver tous les nombres inférieurs à 10 qui ont exactement quatre diviseurs.*
Cette liste est réduite à deux nombres {6 ;8}. En effet, les diviseurs de 6 sont {1 ;2 ;3 ;6} et ceux de 8 sont {1 ;2 ;4 ;8}. Dans chaque cas, il y en a bien quatre. Il est demandé au lecteur de vérifier qu'il n'en existe pas d'autres.

2 ► *9 est-il un nombre premier ? Expliquer.*
9 est divisible par 3, ce n'est donc pas un nombre premier, qui, par définition, n'est divisible que par 1 et par lui-même.

3 ► *Écrire la liste des diviseurs de 20, classés par ordre croissant. Faire le même travail avec 52. Quels sont les diviseurs communs à 20 et 52 ? Quel est le PGCD de 20 et 52 ?*
Liste de diviseurs de 20 : {1 ;2 ;4 ;5 ;10 ;20}
Liste de diviseurs de 52 : {1 ;2 ;4 ;13 ;26 ;52}
Liste de diviseurs communs à 20 et 52 : {1 ;2 ;4}
On en déduit alors que $PGCD(20;52) = 4$.

4 ► *Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 833 par 45. Écrire cette division en ligne.*
On a $833 = 45 \times 18 + 23$. Le quotient de cette division Euclidienne est donc 18, et le reste est 23.

▷ Exercice 4 (5 points) :

1 ► En utilisant :

- *l'algorithme des différences, calculer le PGCD de 93 et 27.*
  Notons $p = PGCD(93;27)$. On a :
  $93 - 27 = 66$; $66 - 27 = 39$; $39 - 27 = 12$; $27 - 12 = 15$; $15 - 12 = 3$; $12 - 3 = 9$; $9 - 3 = 6$; $6 - 3 = 3$; $3 - 3 = 0$. Il vient alors $p = 3$, car **c'est le dernier reste non nul**.
- *l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 312 et 201.*
  Notons $k = PGCD(312;201)$. On a :
  $312 = 201 \times 1 + 111$; $201 = 111 \times 1 + 90$; $111 = 90 \times 1 + 21$; $90 = 21 \times 4 + 6$; $21 = 6 \times 3 + 3$; $6 = 3 \times 2 + 0$.
  Il vient alors $k = 3$, car **c'est le dernier reste non nul**.

2 ► *La fraction* $\frac{312}{201}$ *est-elle irréductible ? Justifier.*

Dans le cas négatif, rendre cette fraction irréductible en écrivant les calculs.
Cette fraction est réductible puisqu'on vient de voir ci-dessus que $k = PGCD(312;201) = 3$. On va donc simplifier par k numérateur et dénominateur :

$$\frac{312}{201} = \frac{3 \times 104}{3 \times 67} = \frac{104}{67}$$

▷ Exercice 5 (3 points) :

6 510 fourmis noires et 4 650 fourmis rouges décident de s'allier pour combattre les termites. Pour cela, la reine des fourmis souhaite constituer, en utilisant toutes les fourmis, des équipes qui seront toutes composées de la même façon : un nombre de fourmis rouges et un autre nombre de fourmis noires. Quel est le nombre maximal d'équipes que la reine peut ainsi former ?

Le nombre d'équipe n que la reine pourra former doit diviser le nombre de fourmis noires et celui de fourmis rouges. C'est donc un diviseur commun à 6 510 et 4 650. D'autre part, d'après le texte, celui-ci doit être *maximal*. C'est donc par définition le PGCD(6 510 ;4 650).
$6510 = 4650 \times 1 + 1860$, donc PGCD(6510 ;4650) = PGCD(4650 ;1860)
$4650 = 1860 \times 2 + 930$, donc PGCD(4650 ;1860) = PGCD(1860 ;930)
$1860 = 930 \times 2 + 0$, on en conclut que PGCD(6510 ;4650) = 930 (en 3 étapes).
La reine pourra donc constituer 930 équipes.

Devoir de mathématiques : chap.3 Arithmétique, sujet B — $3^{ème}$ 3

Coefficient: 1 — 55 min

Calculatrice autorisée — jeudi 7 novembre 2013

▷ Exercice 1 (3 points) :

1 ► *A partir de l'égalité* $29 \times 12 = 348$, *quelles phrases peut-on écrire, en utilisant les termes "multiple", "diviseur", "divisible par" ? (faire une phrase par terme).*

- 348 est un **multiple** de 29 (ou de 12).
- 29 (ou 12) est un **diviseur** de 348.
- 348 est **divisible par** 29 (ou par 12).

2 ► *27 est-il un diviseur de 352 ? Expliquer la réponse.*
On a $352 = 27 \times 13 + 1$, comme le reste de cette division Euclidienne n'est pas nul (il vaut 1 ici), 27 n'est donc pas un diviseur de 352.

▷ Exercice 2 (4 points) :

1 ► *On sait que le nombre A est à la fois un multiple de 7 et de 11. Donner une valeur possible de A, sachant que A est inférieur à 200.*
7 et 11 étant premiers entre eux, le nombre A s'écrit $A = 7 \times 11 \times k = 77k$, ou k est un nombre entier. Il suffit alors de prendre différentes valeurs pour k, sachant que $A < 200$, on obtient $A = 77$ ou $A = 154$.

2 ► *Trouver les deux chiffres manquants du nombre B (B = 3 4□□) pour qu'il soit divisible à la fois par 5 et par 9. Donner toutes les possibilités.*
5 et 9 étant premiers entre eux, le nombre B s'écrit $B = 5 \times 9 \times q = 45q$, où q est un nombre entier. On trouve avec l'aide de la calculatrice $B = 45 \times 76 = 3\,420$ ou encore $B = 45 \times 77 = 3\,465$.

3 ► *Les nombres 834 et 273 sont-ils premiers entre eux ? Justifier, sans calculer leur PGCD.*
Ces deux nombres sont divisibles par trois de manière évidente, puisque la somme de leurs chiffres est divisible par trois. Leur PGCD est donc au moins égal à trois, et par conséquent, ils ne peuvent être premiers entre eux.

▷ Exercice 3 (5 points) :

1 ► *Trouver tous les nombres inférieurs à 10 qui ont exactement quatre diviseurs.*
Cette liste est réduite à deux nombres {6 ;8}. En effet, les diviseurs de 6 sont {1 ;2 ;3 ;6} et ceux de 8 sont {1 ;2 ;4 ;8}. Dans chaque cas, il y en a bien quatre. Il est demandé au lecteur de vérifier qu'il n'en existe pas d'autres.

2 ► *12 est-il un nombre premier ? Expliquer.*
12 est divisible par 4 (par exemple), ce n'est donc pas un nombre premier, qui, par définition, n'est divisible que par 1 et par lui-même.

3 ► *Écrire la liste des diviseurs de 30, classés par ordre croissant. Faire le même travail avec 56. Quels sont les diviseurs communs à 30 et 56 ? Quel est le PGCD de 30 et 56 ?*
Liste de diviseurs de 30 : {1 ;2 ;3 ;10 ;15 ;30}
Liste de diviseurs de 56 : {1 ;2 ;4 ;7 ;8 ;14 ;28 ;56}
Liste de diviseurs communs à 30 et 56 : {1 ;2}
On en déduit alors que $PGCD(30;56) = 2$.

4 ► *Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 833 par 45. Écrire cette division en ligne.*
On a $833 = 45 \times 18 + 23$. Le quotient de cette division Euclidienne est donc 18, et le reste est 23.

▷ Exercice 4 (5 points) :

1 ► En utilisant :

- *l'algorithme des différences, calculer le PGCD de 60 et 36.*
  Notons $p = PGCD(60;36)$. On a :
  $60 - 36 = 24$; $36 - 24 = 12$; $24 - 12 = 12$; $12 - 12 = 0$. Il vient alors $p = 12$, car **c'est le dernier reste non nul**.
- *l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 685 et 411.*
  Notons $k = PGCD(685;411)$. On a :
  $685 = 411 \times 1 + 274$; $411 = 274 \times 1 + 137$; $274 = 137 \times 2 + 0$.
  Il vient alors $k = 137$, car **c'est le dernier reste non nul**.

2 ► *La fraction* $\dfrac{685}{411}$ *est-elle irréductible ? Justifier.*

Dans le cas négatif, rendre cette fraction irréductible en écrivant les calculs.
Cette fraction est réductible puisqu'on vient de voir ci-dessus que $k = PGCD(312;201) = 137$. On va donc simplifier par k numérateur et dénominateur :

$$\frac{685}{411} = \frac{5 \times 137}{3 \times 137} = \frac{5}{3}$$

▷ Exercice 5 (3 points) :

6 510 fourmis noires et 4 650 fourmis rouges décident de s'allier pour combattre les termites. Pour cela, la reine des fourmis souhaite constituer, en utilisant toutes les fourmis, des équipes qui seront toutes composées de la même façon : un nombre de fourmis rouges et un autre nombre de fourmis noires. Quel est le nombre maximal d'équipes que la reine peut ainsi former ?
Le nombre d'équipe n que la reine pourra former doit diviser le nombre de fourmis noires et celui de fourmis rouges. C'est donc un diviseur commun à 6 510 et 4 650. D'autre part, d'après le texte, celui-ci doit être *maximal*. C'est donc par définition le PGCD(6 510 ;4 650).
$6510 = 4650 \times 1 + 1860$, donc PGCD(6510 ;4650) = PGCD(4650 ;1860)
$4650 = 1860 \times 2 + 930$, donc PGCD(4650 ;1860) = PGCD(1860 ;930)
$1860 = 930 \times 2 + 0$, on en conclut que PGCD(6510 ;4650) = 930 (en 3 étapes).
La reine pourra donc constituer 930 équipes.