Épreuves Communes de mathématiques : correction du sujet A

3$^{\text{ème}}$

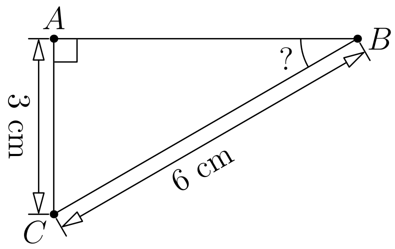
Coefficient: 2 — 120 min

Calculatrice autorisée — lundi 18 mai 2015

▷ Exercice 1 ______________________________ **(2 points) :**

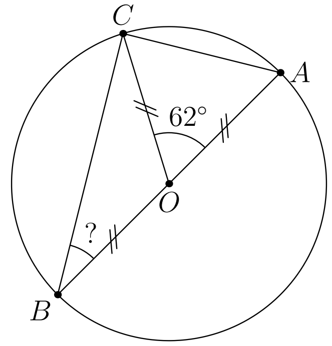
Deux figures codées sont données ci-dessous. Elles ne sont pas dessinées en vraie grandeur.
Pour chacune d'elles, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$.

Figure 1 :



Par rapport à l'angle $\widehat{\text{ABC}}$, on dispose du côté opposé et de l'hypoténuse, d'où l'idée d'utiliser un sinus :
$\sin(\widehat{\text{ABC}}) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
A l'aide de la calculatrice, on obtient :
$\widehat{\text{ABC}} = 30°$.

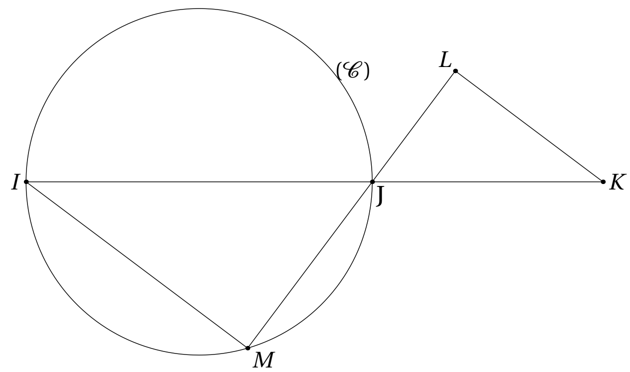
Figure 2 :



$\widehat{\text{BOC}}$ et $\widehat{\text{COA}}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{\text{BOC}} = 180 - \widehat{\text{COA}}$.
$\widehat{\text{BOC}} = 180 - 62 = 118°$. BOC étant isocèle en O, on a $\widehat{\text{CBO}} = \widehat{\text{BCO}}$.
Ainsi, comme la somme des mesures des angles d'un triangleest égale à 180 degrés, il vient : $\widehat{\text{CBO}} = (180 - \widehat{\text{BOC}}) \div 2 = (180 - 118) \div 2$
$\widehat{\text{CBO}} = 62 \div 2 = 31°$

▷ Exercice 2 ______________________________ **(4,5 points) :**

JKL est un triangle tel que : $JK = 6$ cm ; $JL = 3,6$ cm, et $KL = 4,8$ cm.
J est un point du segment $[IK]$ et $IJ = 9$ cm.
$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.
La droite (JL) coupe $(\mathscr{C})$ en M. *La figure n'est pas en vraie grandeur et il n'est pas demandé de la reproduire.*



1 ► Démontrer que le triangle JKL est rectangle.
Dans le triangle JLK, on calcule :
— le carré du plus long côté : $JK^2 = 6^2 = 36$;
— la somme des carrés des deux autres côtés :
$JL^2 + LK^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$
On constate que $JK^2 = JL^2 + LK^2$, ainsi le triangle JKL est rectangle en L d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

2 ► Justifier que le triangle IJM est rectangle.
IJM est un triangle inscrit dans un cercle ayant pour diamètre son plus grand côté ($[IJ]$ ici), il est donc rectangle en M.

3 ► Montrer que (LK) et (IM) sont parallèles.
Les droites (LK) et (IM) sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite (IM) d'après les questions précédentes.

4 ► Déterminer la longueur JM.
Les droites (IK) et (ML) sont sécantes en J, et puisque les droites (LK) et (IM) sont parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{JK}{JI} = \dfrac{JL}{JM} = \dfrac{KL}{IM}$
De l'égalité $\dfrac{JL}{JM} = \dfrac{JK}{JI}$, on obtient :
$JM = \dfrac{JI \times JL}{JK} = \dfrac{9 \times 3,6}{6} = 5,4$ cm

▷ **Exercice 3** **(4 points) :**

1 ► On pose $H = (x-5)^2 - x(x-12)$.

a) Développer et réduire l'expression H.

$H = x^2 - 10x + 25 - x^2 + 12x = 2x + 25$

b) Résoudre l'équation $H = 25$. $H = 25$ est équivalent à $2x + 25 = 25$, soir $2x = 0$ ou $x = 0$.

2 ► On pose $I = (7x-3)^2 - 5^2$.

a) Factoriser l'expression I.

$I = (7x-3-5)(7x-3+5) = (7x-8)(7x+2)$

b) Résoudre l'équation $(7x-8)(7x+2) = 0$. Un produit de facteurs est nul si, et seulement si l'un au moins des facteurs est nul : $7x-8 = 0$ ou $7x+2 = 0$

On a donc deux solutions qui sont $x = \dfrac{8}{7}$ ou $x = \dfrac{-2}{7}$

▷ **Exercice 4** **(4 points) :**

On donne le programme de calcul ci-contre.

Choisir un nombre. Lui ajouter 2. Calculer le carré de cette somme. Soustraire 9 au résultat obtenu.

1 ► On choisit 3 comme nombre de départ. Montrer que le résultat du programme est 16.

$(3+2)^2 - 9 = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16$.

2 ► On choisit -1 comme nombre de départ. Calculer le résultat du programme.

$(-1+2)^2 - 9 = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8$.

3 ► On choisit $\sqrt{2}$ comme nombre de départ. Écrire le résultat du programme de calcul sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont deux nombres entiers relatifs.

$(\sqrt{2}+2)^2 - 9 = \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2 + 2^2 - 9 = 2 + 2\sqrt{2} + 4 - 9 = -3 + 2\sqrt{2}$.

4 ► On appelle x le nombre de départ. Écrire le résultat du programme en fonction de x.

$(x+2)^2 - 9 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 9 = x^2 + 4x + 4 - 9 = x^2 + 4x - 5$

5 ► Quel(s) nombre(s) faut-il choisir au départ pour que le résultat du programme soit nul ?

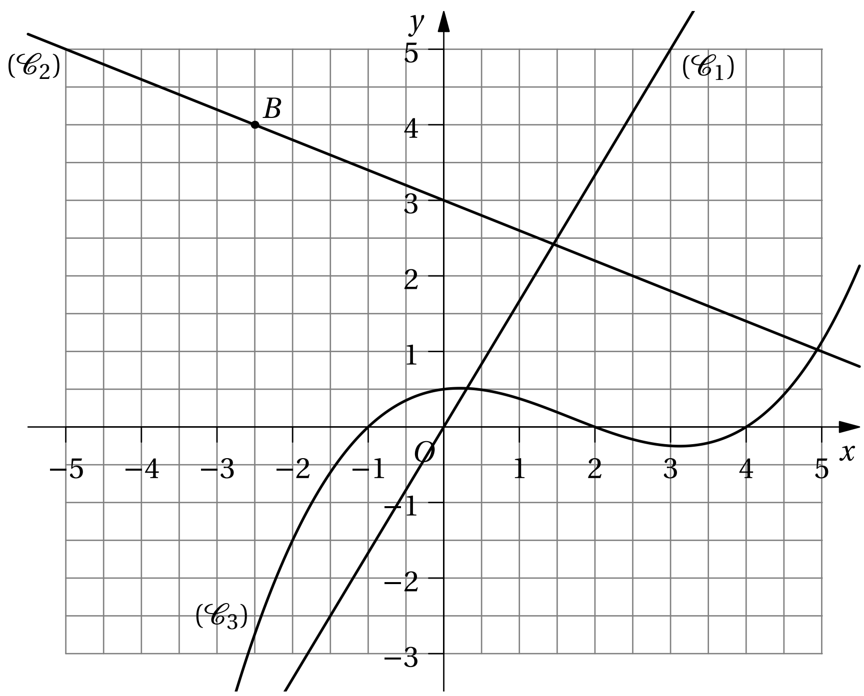
On cherche les nombres x tels que : $(x+2)^2 - 9 = 0$

On factorise donc l'expression : $(x+2)^2 - 3^2 = (x+2-3)(x+2+3) = (x-1)(x+5)$.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si l'un au moins des facteurs est nul : $x - 1 = 0$ ou $x + 5 = 0$, soit deux solutions : $x1$ ou $x = -5$.

▷ **Exercice 5** **(3,5 points) :**

$(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, et $(\mathscr{C}_3)$ sont les représentations graphiques de trois fonctions.



1 ► Lire graphiquement les coordonnées de B.

$B(-2,5;4)$

2 ► Par lecture graphique, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_3)$ avec l'axe des abscisses.
Par lecture graphique, les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_3)$ avec l'axe des abscisses sont : $x = -1$, $x = 2$ et $x = 4$.

3 ► Laquelle de ces représentations est celle d'une fonction linéaire ? Justifier la réponse.
$(\mathscr{C}_2)$ est la représentation d'une fonction linéaire car c'est une droite qui ne passe pas par l'origine.

4 ► $(\mathscr{C}_2)$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -0,4x+3$.

a) Calculer l'antécédent de 1 par la fonction f.
Un antécédent de 1 par f est un nombre x tel que $f(x) = 1$. Or, $f(x) = 1$ donne $-0,4x+3 = 1$, soit $-0,4x = -2$, ou encore $x = \dfrac{-2}{-0,4} = 5$. L'antécédent de 1 par la fonction f est 5.

b) On considère le point $A(4,5;1,2)$. Justifier que le point A appartient à la représentation graphique $(\mathscr{C}_2)$.
On calcule $f(4,5)$, et on va montrer que cela donne l'ordonnée de A, c'est à dire $1,2$: $-0,4 \times 4,5 + 3 = -1,8 + 3 = 1,2$.

▷ Exercice 6 (2 points) :

En 2 004, une entreprise a augmenté ses ventes de 30 %.
En 2 005, les ventes ont augmenté cette fois-ci de 20 %.
Calculer l'augmentation globale en pourcentage sur ces deux années.

On sait qu'augmenter de p % le prix d'un article revient à multiplier son prix par $(1+\dfrac{p}{100})$. Si on note x le prix initial de l'article, alors après l'augmentation de 30 %, le prix est donc de $1,3x$. Après l'augmentation de 20 %, le prix est donc de $1,3x \times 1,2 = 1,56 = 1 + \dfrac{56}{100}$. Finalement, le prix de l'article a donc subi une augmentation de 56 %.

▷ Exercice 7 (4 points) :

Pour emprunter des livres dans une bibliothèque, on a le choix entre deux formules :

- formule A : payer 0,50 € par livre emprunté ;
- formule B : acheter une carte à 7,50 € par an, puis payer 0,20 € par livre emprunté.

On note x le nombre de livres empruntés par une personne en un an.

1 ► Soit P_A le prix à payer avec la formule A.

a) Vérifier que $P_A = 10$ lorsque $x = 20$.
$P_A = 0,50 \times 20 = 10$

b) Exprimer P_A en fonction de x.
$P_A = 0,50 \times x = 0,5x$

2 ► Soit P_B le prix à payer avec la formule B.

a) Vérifier que $P_B = 11,50$ lorsque $x = 20$.
$P_B = 7,50 + 0,20 \times 20 = 7,50 + 4 = 11,50$

b) Exprimer P_B en fonction de x.
$P_B = 7,50 + 0,20 \times x = 7,5 + 0,2x$

3 ► a) Résoudre l'inéquation $P_A > P_B$.
Cette inéquation s'écrit : $0,5x > 7,5 + 0,2x$, soit $0,3x > 7,5$ ou encore $x > \dfrac{7,5}{0,3}$, soit $x > 25$.

b) Comment interprétez-vous ce résultat ?
Interprétation : la formule A est plus chère que la formule B lorsque l'on emprunte plus de 25 livres.

▷ Exercice 8 (2 points) :

1 ► Pour compléter le tableau de valeurs d'une fonction f ci-dessous, on écrit dans la cellule B2 la formule "=-4*B1+2".

	A	B	C	D	E
1	x	-5	0	5	10
2	f(x)	=-4*B1+2			
3	g(x)				

a) De quelle fonction f s'agit-il ? C'est la fonction $f : x \mapsto -4x+2$

b) On étire cette formule horizontalement. Quelles valeurs obtient-on alors dans les cellules B2, C2, D2 et E2 ?
On obtient respectivement dans ces cellules les valeurs 22, 2, -18 et -38.

2 ► En ligne 3, on souhaite calculer les images de -5 ; 0 ; 5 et 10 par la fonction g définie par $g(x) = 5x - 4$.
Quelle formule faut-il écrire dans la cellule B3 ? Il faut écrire dans la cellule B3 la formule "=5*B1-4"

▷ **Exercice 9** **(10 points) :**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. **Barème** : **1 point** par réponse correcte, **–0,5 point** par réponse incorrecte (dans la mesure d'une note positive), et **0 point** si pas de réponse.

Figure 1 :

Sur la figure ci-dessous :
$AE = 21$ mm, $AF = 55$ mm
$AC = 34$ mm et $AB = 89$ mm.

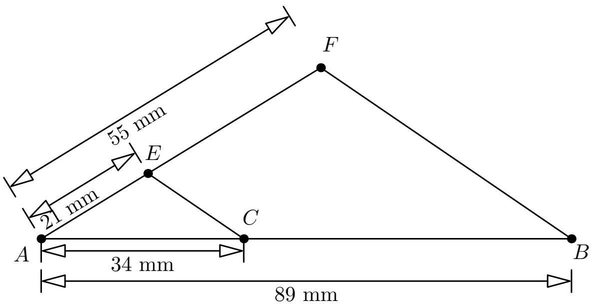


Figure 2 :

$ABCD$ est un carré de côté $2\sqrt{2}\ cm$.

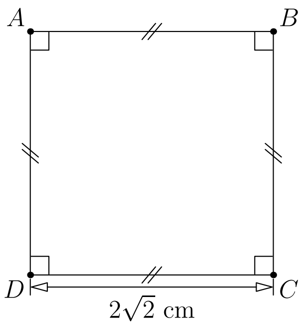
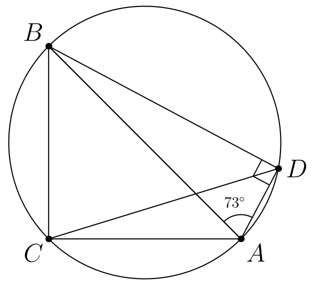


Figure 3 :

A, B, C et D sont 4 points d'un cercle de diamètre $[AB]$;
le triangle ABD est rectangle en D,
$AD = 1,5$ cm et $\widehat{BAD} = 73°$.



n°	Question	A	B	C	Réponse
1	Le PGCD de 364 et 156 est :	26	78	52	C
2	L'écriture scientifique de $\dfrac{15 \times 10^8 \times 10^{-3}}{10^2}$ est :	$1,5 \times 10^4$	$1,5 \times 10^3$	$1,5 \times 10^2$	A
3	Les solutions de l'inéquation $-3x + 7 \geqslant 5$ sont les nombres x vérifiant :	$x \geqslant \dfrac{2}{3}$	$x \leqslant \dfrac{2}{3}$	$x \leqslant -\dfrac{2}{3}$	C
4	Sur la figure 1, (EC) et (FB) sont elles parallèles ?	Oui	Non	On ne peut pas savoir.	A
5	Sur la figure 2, le périmètre de $ABCD$ est égal à	$8\sqrt{2}$ cm.	$2\sqrt{8}$ cm.	$8\sqrt{8}$ cm.	A
6	Sur la figure 2, l'aire de $ABCD$ est égale à	8 cm^2.	16 cm^2.	4 cm^2.	A
7	Sur la figure 2 :	$AC = 4$ cm.	$AC = 4\sqrt{2}$ cm.	$AC = 16$ cm.	C
8	Sur la figure 3, le triangle ABC est :	rectangle.	isocèle.	équilatéral.	A
9	Sur la figure 3 :	$BD \approx 5,1$ cm.	$BD \approx 1,5$ cm.	$BD \approx 4,9$ cm.	C
10	Sur la figure 3 :	$\widehat{BCD} = 36,5°$.	$\widehat{BCD} = 73°$.	$\widehat{BCD} = 146°$.	B

NOM, PRÉNOM et CLASSE : ***Cette feuille est à rendre avec la copie. Sujet A.***