CHAPITRE 10

COURS: NOTIONS DE PROBABILITÉS

Table des matières

1. Vocabulaire

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude. Chacun des résultats possibles de l'expérience est appelé **issue** (ou **éventualité**).

Exemple :
Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux rouges ($R1$ et $R2$), trois vertes ($V1$, $V2$ et $V3$) et une jaune (J).
Tirer une boule dans cette urne est une expérience aléatoire à six issues : $R1$; $R2$; $V1$; $V2$; $V3$; J.

Définition

Un **événement** A est un ensemble d'issues. On dit qu'il est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience est l'une des issues qui le composent.

— Un **événement certain** est toujours réalisé ; il contient toutes les issues.
— Un **événement impossible** n'est jamais réalisé ; il ne contient aucune issue.
— L'**événement contraire** d'un événement A, noté $\overline{A}$, est l'événement qui se réalise lorsque l'événement A ne se réalise pas.
— Deux événements sont **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent être réalisés en même temps.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, l'événement A : « la boule tirée est rouge » contient deux issues ($R1$; $R2$) et l'événement B : « la boule tirée est jaune » contient une issue (J).

— L'événement C : « la boule tirée est colorée » est certain. Il contient les six issues.
— L'événement D : « la boule tirée est violette » est impossible. Il ne contient aucune issue.
— L'événement $\overline{A}$ est : « la boule tirée n'est pas rouge ». Il contient quatre issues ($V1$; $V2$; $V3$; J).
— Les événements A et B sont incompatibles. Une boule ne peut pas être rouge et jaune à la fois.

2. Probabilité d'un événement

Définition

Lorsque l'on répète **un très grand nombre de fois** une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement A se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité** de l'événement A et notée $p(A)$.

Exemple :
Lors de n répétitions de l'expérience décrite dans l'exemple précédent, on a tiré n_R fois une boule rouge.
On constate alors que, lorsque le nombre n de tirages est très grand, la fréquence de réalisation de l'événement A, $\frac{n_R}{n}$, se rapproche de la fréquence théorique $\frac{2}{6}$.

On a tiré une boule rouge environ 2 fois sur 6 (ou une fois sur trois). On note : $p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, ou $p(A)\approx 0,333$ ou $p(A)\approx 33,3\%$.

Propriétés

- La probabilité d'un événement A est égale à la **somme des probabilités des issues** qui le composent.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience est égale à 1.
- La probabilité d'un événement **certain** est 1 et celle d'un événement **impossible** est 0.
- La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1 : $0 \leq p(A) \leq 1$.
- La probabilité de l'événement $\overline{A}$, contraire de A, est : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- Si les événements A et B sont **incompatibles**, alors la probabilité que l'**un des deux** se réalise est : $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(B)$.

Dans l'exemple précédent :

- $p(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
- $p(B)=\frac{1}{6}$.
- $p(C)=1$.
- $p(D)=0$.
- $p(R1)+p(R2)+p(V1)+p(V2)+p(V3)+p(J)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$
- $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Deux fois sur trois, on ne tire pas de boule rouge.
- $p(\text{A ou B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Une fois sur deux, on tire une boule rouge ou jaune.

3. Situation d'équiprobabilité

Définition

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu il s agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, chaque boule à la même chance d'être tirée, les probabilités des six issues sont donc les mêmes. Il s'agit alors d'une situation d'équiprobabilité.

Propriétés

Dans une situation d'équiprobabilité, si l'expérience aléatoire à N issues, alors la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{N}$.
La probabilité d'un événement A est donc : $p(A)=\frac{n_A}{N}$, n_A étant le nombre d'issues de A.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, il y a 6 issues équiprobables ($N = 6$). La probabilité de chaque issue est alors égale à 1 Donc, la probabilité de l'événement A : « la boule tirée est rouge » est . $p(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ car le nombre nA de boules rouges est 2.

Remarque :
Le tirage d'une boule est équiprobable mais les probabilités d'obtenir une boule rouge, verte ou jaune ne sont pas égales. En effet : $p(R) = \dfrac{1}{3}$; $p(V) = \dfrac{1}{2}$; $p(J) = \dfrac{1}{6}$.

4. Arbre de probabilité

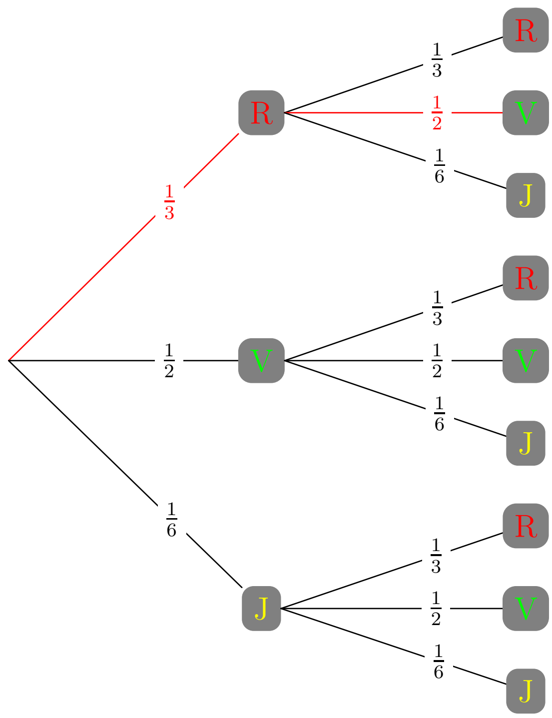
Définition

Un **arbre de probabilité** est un schéma représentant une expérience aléatoire à une ou plusieurs épreuves. Une **branche** représente un événement.

— Lorsque l'on fait apparaître les probabilités des événements, on dit que l'arbre est **pondéré**.
— Une succession de branches est appelé un " **chemin** ".

Exemple :

On considère deux urnes identiques à celle de l'exemple précédent. On peut représenter le tirage d'une boule dans chaque urne par l'arbre pondéré ci-contre. Le chemin en rouge conduit à l'événement $(R; V)$.



Propriétés

Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un événement est égale au **produit** des probabilités indiquées sur les branches du chemin qui conduit à cet événement.

Exemple :
La probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte est $p(\mathrm{R}; \mathrm{V}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.