Un corrigé des Épreuves Communes de mathématiques $4^{ème}$
Coefficient: 2 1h 30min
Calculatrice autorisée lundi 2 février 2015

Partie 1 : Numérique (19 points)

▷ **Exercice 1** **(2, 5 points) :**

A est le produit de 24 nombres (non nuls) comportant 23 facteurs négatifs.
B est le produit de 13 nombres (non nuls) comportant 11 facteurs négatifs.
Donne, lorsque c'est possible, le signe des expressions suivantes.
Si tu peux le faire, explique alors comment. Sinon, contente-toi de dire qu'on ne peut pas.

a) $A \times B$ b) $A \div B$ c) $A - B$ d) A^2 e) $A + B$

On va d'abord déterminer les signes de A et B, les questions seront ainsi plus simples par la suite.
A est un produit qui comporte 23 facteurs négatifs, 23 étant impair, **A est négatif**.
De même, **B est négatif** vu qu'il comporte 11 facteurs négatifs.

a) $A \times B$ est le produit de deux nombres négatifs, il est donc **positif**.
b) $A \div B$ est un quotient de deux nombres négatifs, il est donc **positif** lui aussi.
c) $A - B = A + (-B)$. La différence $A - B$ est donc égale à la somme de A et de l'opposé de B. Or, comme l'opposé de B est positif, **On ne peut donc pas savoir** puisqu'il nous manque les distances à zéro respectives de A et B pour conclure.
d) $A^2 = A \times A$ est donc le produit de 2 nombres négatifs. A^2 est **positif**. Notez qu'on pouvait aussi conclure en disant qu'**un carré est toujours positif**.
e) Puisque A et B sont négatifs, la somme $A + B$ sera **négative**.

▷ **Exercice 2** **(7, 5 points) :**

Calcule les expressions suivantes en respectant les priorités. Donne les résultats sous la forme d'un entier ou d'une fraction simplifiée :

$A = (4-6) \times [5 + (3-(-2)) \times 2]$ $B = \dfrac{-7 \times (-3) - (-3) \times (-5)}{12 \div (-3) - 2}$ $C = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{9}$

$D = -\dfrac{45}{28} \times \dfrac{7}{-15}$ $E = \dfrac{-3}{2} \div \dfrac{-5}{7}$ $F = \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{2}\right) \div \left(-\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}\right)$

$G = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{4} - \dfrac{4}{3}$

$A = (4-6) \times [5 + (3-(-2)) \times 2]$
$A = (-2) \times [5 + (3+2) \times 2]$
$A = (-2) \times [5 + 5 \times 2]$
$A = (-2) \times [5 + 10]$
$A = (-2) \times 15$
$A = -30$

$B = \dfrac{-7 \times (-3) - (-3) \times (-5)}{12 \div (-3) - 2}$
$B = \dfrac{21 - 15}{-4 - 2}$
$B = \dfrac{6}{-6}$
$B = -1$

$C = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{9}$
$C = \dfrac{-3}{36} + \dfrac{4}{36}$
$C = \dfrac{1}{36}$

$D = -\dfrac{45}{28} \times \dfrac{7}{-15}$
$D = \dfrac{-3 \times 3 \times 5}{7 \times 4} \times \dfrac{7}{-3 \times 5}$
$D = \dfrac{3}{4}$

$E = \dfrac{-3}{2} \div \dfrac{-5}{7}$
$E = \dfrac{-3}{2} \times \dfrac{7}{-5}$
$E = \dfrac{-3 \times 7}{2 \times (-5)}$
$E = \dfrac{21}{10}$

$F = \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{2}\right) \div \left(-\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}\right)$
$F = \left(\dfrac{8}{6} - \dfrac{15}{6}\right) \div \left(-\dfrac{8}{12} + \dfrac{9}{12}\right)$
$F = \left(\dfrac{-7}{6}\right) \div \left(\dfrac{1}{12}\right)$
$F = \dfrac{-7}{6} \times \dfrac{6 \times 2}{1}$
$F = -14$

Et enfin :

$$G=\frac{3}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}-\frac{4}{3}$$
$$G=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{3}$$
$$G=\frac{18}{12}+\frac{9}{12}-\frac{16}{12}$$
$$G=\frac{27}{12}-\frac{16}{12}$$
$$G=\frac{11}{12}$$

▷ **Exercice 3** **(6 points) :**

1 ► Écris chaque expression sous la forme d'une puissance de 10 en détaillant :

a) $(10^9)^4$

b) $10^{12}\times10^{-8}\times10^{5}$

c) $\dfrac{10^{-6}}{10^{6}}$

d) $\dfrac{10^{41}\times10^{7}}{10^{-39}}$

2 ► Les nombres suivants sont-ils écrits sous forme scientifique ou non ? Aucune justification n'est demandée

a) $5,23\times10^{12}$

b) $72,43\times10^{-8}$

3 ► Écris les nombres suivants en notation scientifique :

a) $7\,283$

b) $654,98$

c) $0,005\,8$

d) $0,67\times10^{2}$

e) 159×10^{-5}

1 ►

a) $(10^9)^4=10^{9\times4}=10^{36}$

b) $10^{12}\times10^{-8}\times10^{5}=10^{12-8+5}=10^{9}$

c) $\dfrac{10^{-6}}{10^{6}}=10^{-6-6}=10^{-12}$

d) $\dfrac{10^{41}\times10^{7}}{10^{-39}}=\dfrac{10^{41+7}}{10^{-39}}=\dfrac{10^{48}}{10^{-39}}=10^{48-(-39)}=10^{48+39}=10^{87}$

2 ►
a) oui.
b) non (72,43 est supérieur à 10).

3 ►
a) $7\,283=7,283\times10^{3}$

b) $654,98=6,549\,8\times10^{2}$

c) $0,005\,8=5,8\times10^{-3}$

d) $0,67\times10^{2}=6,7\times10^{-1}\times10^{2}=6,7\times10^{-1+2}=6,7\times10^{1}$

e) $159\times10^{-5}=1,59\times10^{2}\times10^{-5}=1,59\times10^{-3}$

▷ **Exercice 4** **(3 points) :**

1 ► Calcule H et donne le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible :

$$H=\frac{14\times10^{5}\times35\times10^{-3}}{21\times10^{3}}$$

2 ► Donne les écritures décimale et scientifique de :

$$I=\frac{3\times10^{2}\times1,2\times(10^{-3})^{4}}{0,2\times10^{-7}}$$

1 ►

$$H = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$
$$H = \frac{7 \times 2 \times 35}{3 \times 7} \times \frac{10^5 \times 10^{-3}}{10^3}$$
$$H = \frac{70}{3} \times 10^{5-3-3}$$
$$H = \frac{7}{3} \times 10^1 \times 10^{-1}$$
$$H = \frac{7}{3}$$

2 ►

$$I = \frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times (10^{-3})^4}{0,2 \times 10^{-7}}$$
$$I = \frac{3 \times 6 \times 0,2}{0,2} \times \frac{10^2 \times 10^{-3\times 4}}{10^{-7}}$$
$$I = 18 \times 10^{2-12-(-7)}$$
$$I = 1,8 \times 10^1 \times 10^{-10+7}$$
$$I = 1,8 \times 10^1 \times 10^{-3}$$
$$I = 1,8 \times 10^{1-3}$$

L'écriture scientifique est donc :

$$I = 1,8 \times 10^{-2}$$

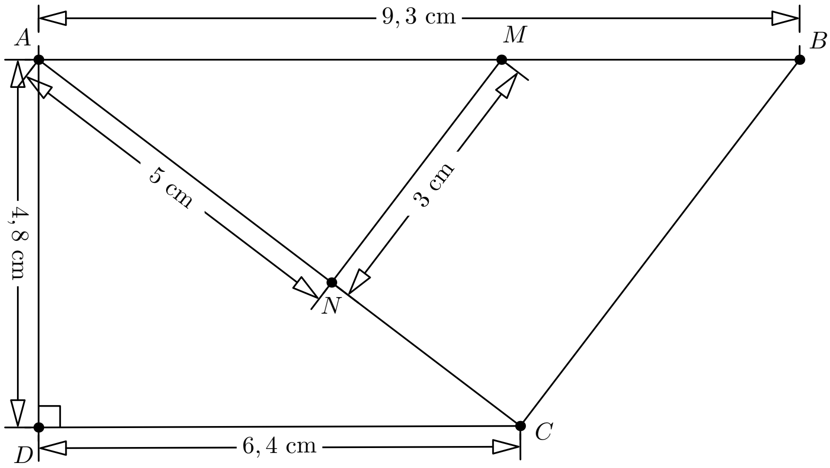
et l'écriture décimale :

$$I = 0,018$$

Partie 2 : Géométrique (19 points)

▷ Exercice 5 **(6,5 points) :**

Sur la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles, le triangle ADC est rectangle en D, et $AB = 9,3$ cm.



a) Montre que $AC = 8$ cm.
b) Calcule BC.
c) ABC est-il rectangle ?

a) Dans le triangle ADC rectangle en D, on a, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 23,04 + 40,96 = 64$. Comme AC est une longueur, $AC \geq 0$, donc $AC = \sqrt{64} = 8$ cm.

b) Dans le triangle ABC, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On peut donc appliquer le théorème de Thalès :
$\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$. En partant de l'égalité $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{AC}{AN}$, on obtient $BC = \dfrac{AC \times MN}{AN} = \dfrac{8 \times 3}{5} = \dfrac{24}{5} = \dfrac{48}{10} = 4,8$ cm.

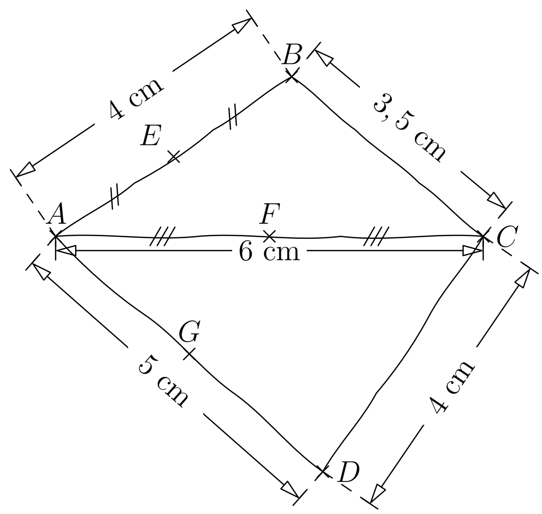
c) Dans le triangle ABC, on calcule :
- le carré du plus long côté : $AB^2 = 9,3^2 = 86,49$.
- la somme des carrés des deux autres côtes : $AC^2 + BC^2 = 8^2 + 4,8^2 = 64 + 23,04 = 87,04$.

On constate que $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$, ainsi ABC n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème de Pythagore.

▷ Exercice 6 **(10 points) :**

ABC est un triangle tel que $AC = 6$ cm, $AB = 4$ cm et $BC = 3,5$ cm.
D est le point tel que $AD = 5$ cm, $CD = 4$ cm, et tel que B et D soient de part et d'autre du segment $[AC]$.
E est le milieu de $[AB]$ et F est le milieu de $[AC]$. La parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.
Une figure faite à main levée est donnée ci-dessous à titre indicatif.

a) Montre que (EF) est parallèle à (BC).
b) Montre que G est le milieu de $[AD]$.
c) Montre que (EG) et (BD) sont parallèles.
d) Calcule les longueurs EF et FG. Justifie.
e) Calcule le périmètre $\mathscr{P}_{ABCD}$ du quadrilatère $ABCD$.



a) Dans le triangle ABC, E est le milieu du côté $[AB]$, et F celui de $[AC]$.
Or, dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
Ainsi, (EF) est parallèle à (BC).

b) Dans le triangle ADC, F est le milieu du côté $[AC]$, et la droite (FG) est parallèle au côté $[CD]$.
Or, dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté parallèlement à un deuxième côté passe aussi par le milieu du troisième côté.
Ainsi, G est le milieu du côté $[AD]$.

c) Dans le triangle ABD, E est le milieu du côté $[AB]$, et G celui de $[AD]$.
Or, dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
Ainsi, (EG) est parallèle à (BD).

d) Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.
Dans le triangle ABC, le segment $[EF]$ joignant les milieux respectifs E et F des côtés $[AB]$ et $[AC]$ a donc pour longueur la moitié du troisième côté $[BC]$.

$EF = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{3,5}{2} = 1,75$ cm.

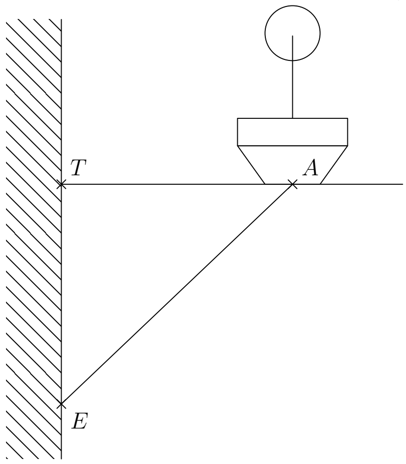
De même, dans le triangle ADC, le segment $[FG]$ joignant les milieux respectifs F et G des côtés $[AC]$ et $[AD]$ a donc pour longueur la moitié du troisième côté $[CD]$.

$FG = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm.

e) $\mathscr{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 4 + 3,5 + 4 + 5 = 16,5$ cm.

▷ **Exercice 7** **(2, 5 points) :**

Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser un pot de fleurs.
Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes :
$AT = 42$ cm ; $AE = 58$ cm et $TE = 40$ cm.
L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifie.



Dans le triangle ATE, on calcule :

- le carré du plus long côté : $AE^2 = 58^2 = 3\,364$.
- la somme des carrés des deux autres côtés : $AT^2 + TE^2 = 42^2 + 40^2 = 1\,764 + 1\,600 = 3\,364$.

On constate que $AE^2 = AT^2 + TE^2$, ainsi ATE est un triangle rectangle en T d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
Comme le mur est vertical, l'étagère d'Arnaud est perpendiculaire au mur, elle est donc bien horizontale.