Correction des épreuves Communes de mathématiques : sujet A — $3^{ème}$

Coefficient: 2 — 2h 00

Calculatrice autorisée — vendredi 5 mai 2017

La présentation et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans le devoir (4 points). En particulier, il est conseillé d'aérer sa copie et d'encadrer (ou de souligner) vos résultats. Les détails de tous les calculs ou raisonnements sont demandés.

▷ **Exercice 1** **(5 points) :**

La copie d'écran montre le travail de Léa pour étudier trois fonctions f, g, h telles que :

$f(x) = x^2 + 3x - 7$

$g(x) = 4x + 5$

h est une fonction affine dont Léa a oublié d'écrire l'expression dans la cellule A4.

	A	B	C	D	E	F
1	x	-2	0	2	4	6
2	$f(x)=x^2+3x-7$	-9	-7	3	21	47
3	$g(x)=4x+5$	-3	5	13	21	29
4	$h(x)$	9	5	1	-3	-7
5						

1 ► Donner un nombre qui a pour image -7 par la fonction f.
Le nombre 0 a pour image -7 par la fonction f.

2 ► Vérifier à l'aide d'un calcul détaillé que $f(6) = 47$.
On a $f(6) = 6^2 + 3 \times 6 - 7 = 36 + 18 - 7 = 54 - 7 = 47$.

3 ► Quelle formule Léa a-t-elle tapée dans la cellule B3, puis généralisée jusqu'à F3 ?
Léa a écrit dans la cellule B3 "=4*B1+5".

4 ► a) Expliquer pourquoi le tableau permet de donner une solution de l'équation $x^2 + 3x - 7 = 4x + 5$.
L'équation $x^2 + 3x - 7 = 4x + 5$, c'est à dire $f(x) = g(x)$ possède une solution car nous voyons que f et g prennent la même valeur 21 dans la colonne E.

b) Quelle est cette solution ?
Cette solution est la valeur $x = 4$. En effet, pour $x = 4$, on a $f(4) = g(4) = 21$.

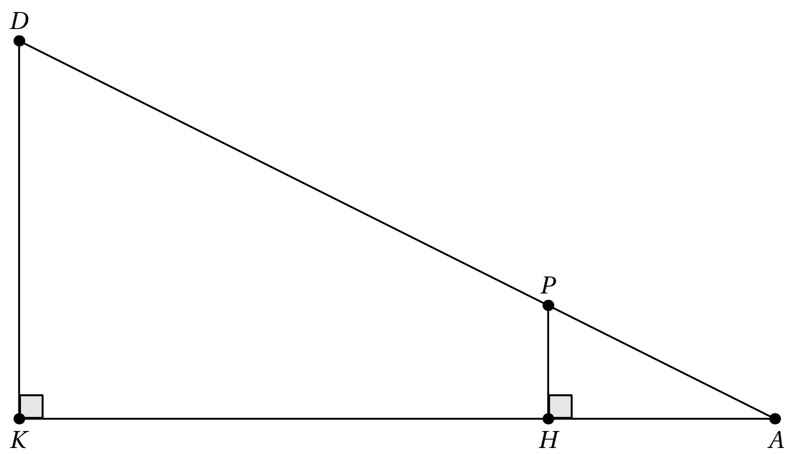
5 ► a) À l'aide du tableau donner l'ordonnée à l'origine de la fonction h. Expliquer brièvement.
Puisque h est affine, h s'écrit $h(x) = ax + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.
On voit donc que $h(0) = a \times 0 + b = b$, or $h(0) = 5$ d'après le tableau, donc $b = 5$.
L'ordonnée à l'origine de la fonction h est 5.

b) Exprimer $h(x)$.
On vient de voir que pour tout nombre x, on a $h(x) = ax + 5$. Comme par exemple $h(-2) = 9$ d'après le tableau, alors il vient :
$-2a + 5 = 9$, soit $-2a = 4$ et $a = \dfrac{4}{-2} = -2$. Ainsi, pour tout nombre x, on a $h(x) = -2x + 5$.

▷ **Exercice 2** **(5 points) :**

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle :

- les points D, P et A sont alignés ;
- les points K, H et A sont alignés ;
- DA = 60 cm ;
- DK = 11 cm ;
- DP = 45 cm.



1 ► Calculer KA au millimètre près

Dans ADK rectangle en K, on a d'après le théorème de Pythagore :
$AD^2 = DK^2 + KA^2$ donc $KA^2 = AD^2 - DK^2 = 60^2 - 11^2 = 3\,600 - 121 = 3\,479$
Comme KA est une longueur, $KA > 0$ donc $KA = \sqrt{3\,479} = 59,0$ cm au mm près.

2 ► Calculer HP.

Les droites (DA) et (KA) sont sécantes en A, les droites (DK) et (PH) sont perpendiculaires à la même droite (KA), donc elles sont parallèles, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{DK}{PH}$. De l'égalité $\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{DK}{PH}$, on obtient :

$PH = \dfrac{AP \times DK}{AD}$. Or, $P \in [AD]$, donc $AP = AD - DP = 60 - 45 = 15$ cm.

Alors, $PH = \dfrac{15 \times 11}{60} = \dfrac{15 \times 11}{15 \times 4} = \dfrac{11}{4} = 2,75$ cm.

▷ **Exercice 3** **(7 points) :**

Agnès envisage de peindre la façade de son hangar.

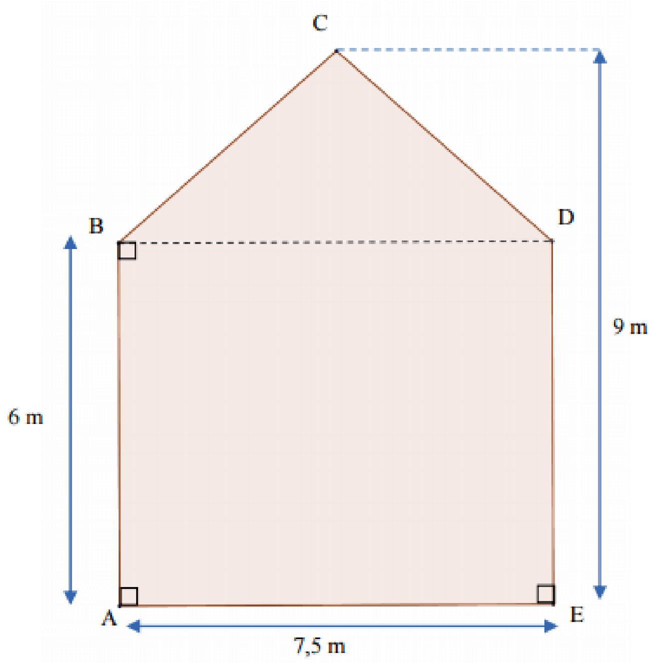
Information 1 : Caractéristiques de la peinture utilisée.

Renseignements concernant un pot de peinture

Volume : 6 L
Temps de séchage : 8 h
Surface couverte : 24 m^2
Monocouche*
Prix : 103,45 €

* Une seule couche de peinture suffit.

Information 2 : schéma de la façade
(le schéma n'est pas à l'échelle)
La zone grisée est la zone à peindre.



1 ► Quel est le montant minimum à prévoir pour l' achat des pots de peinture ?

On va calculer l'aire de la façade à peindre. On décompose naturellement celle-ci en deux polygones : un rectangle $ABDE$ et un triangle BCD. Le calcul de l'aire du triangle BCD nécessite d'avoir une hauteur de celui-ci.

Nommons H le pied de la hauteur issue de C dans BCD. D'après les données de l'énoncé, il vient : $CH = 9 - 6 = 3$ m.

$\mathcal{A}_{hangar} = \mathcal{A}_{ABDE} + \mathcal{A}_{BCD}$

$\mathcal{A}_{hangar} = AB \times AE + \dfrac{BD \times CH}{2}$

$\mathcal{A}_{hangar} = 6 \times 7,5 + \dfrac{7,5 \times 3}{2}$

$\mathcal{A}_{hangar} = 45 + 11,25$

$\mathcal{A}_{hangar} = 56,25$ m^2

On calcule ensuite le nombre de pots de peinture nécessaires, sachant qu'un pot couvre une surface de 24 m^2 :

$56,25 \div 24 = 2,3$ à 10^{-1} près.

Il faudra par conséquent 3 pots de peinture pour repeindre la façade, ce qui coûtera :
$3 \times 103,45 = 310,35$ €.

2 ► Agnès achète la peinture et tout le matériel dont elle a besoin pour ses travaux. Le montant total de la facture est de 343,50 €.

Le magasin lui propose de régler $\dfrac{2}{5}$ de la facture aujourd'hui et le reste en trois mensualités identiques.

Quel sera le montant de chaque mensualité ?

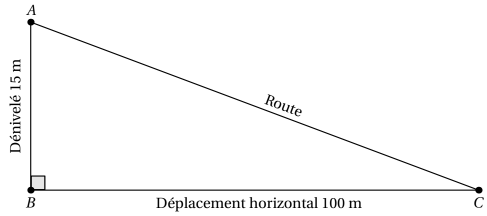
Chaque mensualité représente $\dfrac{1}{5}$ du montant total, donc $\dfrac{1}{5} \times 343,50 = 68,70$ €.

▷ **Exercice 4** ____ **(4 points) :**

Ce panneau routier indique une descente dont la pente est de 15 %.

Panneau A

Cela signifie que pour un déplacement horizontal de 100 mètres, le dénivelé est de 15 mètres. Le schéma ci-contre n'est pas à l'échelle.



1 ► Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{\text{BCA}}$ que fait la route avec l'horizontale. Arrondir la réponse au degré.

Dans le triangle ABC rectangle en C, on dispose du côté opposé et du côté adjacent à l'angle $\widehat{\text{BCA}}$. D'où l'idée d'utiliser la tangente de cet angle :

$\tan(\widehat{\text{BCA}})=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{15}{100}$. Alors, avec la calculatrice, il vient :

$\widehat{\text{BCA}} = 9$ °au degré près.

2 ► Dans certains pays, il arrive parfois que 1a pente d'une route ne soit pas donnée par un pourcentage, mais par une indication telle que « 1 : 5 », ce qui veut alors dire que pour un déplacement horizontal de 5 mètres, le dénivelé est de 1 mètre. Lequel des deux panneaux ci-dessous indique la pente la plus forte ?

Panneau B

On reprend le même schéma que précédemment, mais cette fois-ci $AB = 1$ m et $BC = 5$ m.

Dans le triangle ABC rectangle en C, on dispose du côté opposé et du côté adjacent à l'angle $\widehat{\text{BCA}}$.

$\tan(\widehat{\text{BCA}})=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{5}$. Alors, avec la calculatrice, il vient :

$\widehat{\text{BCA}} = 11$ °au degré près. C'est donc le panneau indiquant "1 :5" qui a la pente la plus élevée.

▷ **Exercice 5** **(5 points) :**

1 ▶ a) Compléter le tableau en indiquant les valeurs obtenues à chaque étape de l'algorithme.

Nombre choisi	2	-4	5
Nombre1	1	-5	4
Nombre2	4	-2	7
Nombre3	4	10	28
Résultat annoncé	6	12	30

b) On choisit x comme nombre de départ. Compléter les pointillés en exprimant les trois nombres en fonction de x.

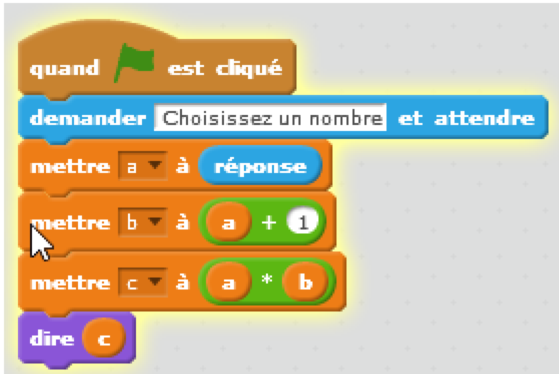
nombre 1 = $x-1$, nombre 2 = $x+2$ et nombre 3 = $(x-1)(x+2) = x^2+2x-x-2 = x^2+x-2$

Donner l'expression du résultat en fonction de x : $(x-1)(x+2)+2 = x^2+x-2+2 = x^2+x$.

2 ▶ Juliette a écrit le programme ci-dessous.

a) Compléter le tableau en indiquant les valeurs de chacune des variables a, b et c.

Nombre choisi	2	-4	5
Valeur de *a*	2	-4	5
Valeur de *b*	3	-3	6
Valeur de *c*	6	12	30
Résultat annoncé	6	12	30



b) Déterminer l'expression du résultat donné par l'algorithme en prenant x pour nombre de départ.

Comme $a = x, b = x+1$, et $c = x(x+1)$, alors le résultat vaudra $x(x+1)$.

c) Montrer qu'en choisissant n'importe quelle valeur x de départ, les deux algorithmes donnent le même résultat.

$x(x+1) = x^2+x$: on retrouve bien le résultat du développement obtenu à la question **1.b**.

▷ **Exercice 6** **(5 points) :**

*Cet exercice est un Q.C.M (questionnaire à choix multiple) dans lequel **une seule réponse est exacte**.*

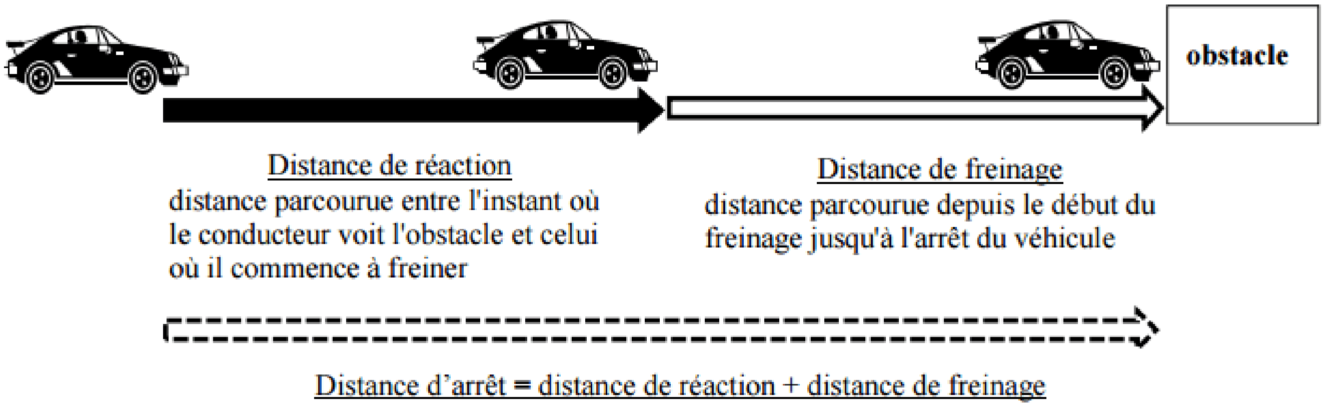
Barème : **1 point** par réponse correcte, **–0,5 point** par réponse incorrecte, et **0 point** si pas de réponse. Une note négative sera considérée comme nulle. **Écrire la lettre correspondant à la bonne réponse dans la dernière colonne.**

n°	Proposition	A	B	C	Réponse :
1	Pour cette série de valeurs : 5 ; 6 ; 4 ; 7 ; 8 ; 4 ; 5	la médiane est 5	la médiane est 7	la moyenne est 5	A
2	La forme développée et réduite de $(x+3)(2x+4)-2(5x+6)$ est :	$2x^2$	$2x^2+20x+24$	$2x^2+24$	A
3	Une factorisation de $16x^2-25$ est :	$(4x-5)^2$	$(4x+5)(4x-5)$	$(4x+5)^2$	B
4	Les solutions de l'équation $(x-5)(3x+4)=0$ sont :	$\frac{4}{3}$ et 5	$-\frac{4}{3}$ et 5	$\frac{4}{3}$ et -5	B
5	Une vitesse de 150 km/h équivaut à :	$\approx$ 417 m/s	2 500 m/min	$\approx$ 0,417 m/s	B

NOM, PRÉNOM et CLASSE : ***Cette feuille est à rendre avec la copie. Sujet A.***

▷ **Exercice 7** **(5 points) :**

La distance parcourue par un véhicule entre le moment où 1e conducteur voit un obstacle et l'arrêt complet du véhicule est schématisée ci-dessous.



1 ► Un scooter roulant à 45 km/h freine en urgence pour éviter un obstacle. À cette vitesse, la distance de réaction est égale à 12,5 m et la distance de freinage à 10 m. Quelle est la distance d'arrêt ?

Si on note d_a la distance d'arrêt, d_r la distance de réaction, et d_f la distance de freinage, on a alors la relation suivante d'après l'énoncé :

$d_a = d_r + d_f$. Alors dans le cas présent, on a :

$d_a = 12,5 + 10 = 22,5$ m. La distance d'arrêt du scooter à 45 km/h est de 22,5 m.

2 ► **Les deux graphiques, donnés ci-dessous,** représentent, dans des conditions normales et sur route sèche, la distance de réaction et la distance de freinage en fonction de la vitesse du véhicule.

En utilisant ces graphiques, répondre aux questions suivantes :

(a) La distance de réaction est de 15 m. À quelle vitesse roule-t-on ? (Aucune justification n'est attendue).
On roule à une vitesse d'environ 55 km/h.

(b) La distance de freinage du conducteur est-elle proportionnelle à la vitesse de son véhicule ? Justifier.
Non, la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse du véhicule, sinon la graphique obtenu serait une droite passant par l'origine du repère.

(c) Déterminer la distance d'arrêt pour une voiture roulant à 90 km/h.
Pour une voiture roulant à 90 km/h, la distance de réaction est de 25 m, et celle de freinage de 40 m. La distance d'arrêt sera donc de $d_a = d_r + d_f = 25 + 40 = 65$ m.

3 ► La distance de freinage en mètres, d'un véhicule sur route mouillée, peut se calculer à l'aide de la formule suivante, où v est la vitesse en km/h du véhicule :

$$\text{distance de freinage sur route mouillée } = \frac{v^2}{152,4}$$

Calculer au mètre près la distance de freinage sur route mouillée à 110 km/h.

Notons d_{frm} la distance de freinage sur route mouillée. On a :

$d_{frm} = \dfrac{v^2}{152,4} = \dfrac{110^2}{152,4} = 79$ m au mètre près.